Examen Blanc

L3 électronique

September 2024

1 Bases de l'algèbre linéaires

- On considère les vecteurs:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

  Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

- On construit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. C'est une matrice triangulaire inférieure donc on peut facilement calculer $det(A) = 1 \neq 0$ donc cette famille de vecteurs forme une base de $\mathbb{R}^3$.

- On considère l'application linéaire f représentée dans la base $\mathcal{F}$ par la matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

  - Énoncer le théorème du rang.
  - $dim(ker(f)) + dim(Im(f)) = 3$
  - Donner la dimension de l'image $\mathrm{Im}(f)$ et du noyau $\mathrm{Ker}(f)$.
  - En appliquant les opérations élémentaires: $C_3 \to C_3 - 2C_1$ et $C_2 \to C_2 - C_1 \to C_3 - 2C_1$ sur <u>les colonnes</u> pour échelonner la matrice B. On trouve

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

    . On en déduit que $dim(Im(f)) = 2$ donc en appliquant le théroème du rang on déduit que $dim(ker(f)) = 3 - dim(Im(f)) = 1$.

- En déduire une solution non-triviale du système homogène $B\vec{x} = 0$.
- D'abord on voit que $dim(ker(f)) \neq 0$ donc le système homogène $B\vec{x}$ admet une autre solution que le solution triviale $\vec{x} = \vec{0}$. On considère que les coordonnées de $vecx$ sont notées (x, y, z). On a: $B\vec{x} = \vec{0} \implies \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$. Une substitution immédiate nous permet de réecrire ce système comme $\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$. Donc l'ensemble de solutions s'écrit sous la forme $\{ \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}, \}$. Donc par exemple $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une solution non-triviale.

2 Systèmes d'équations linéaires

Discuter et résoudre suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} tx - y = 1 \\ x + (t-2)y = -1 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} (t-1)x + y = 1 \\ 2x + ty = -1 \end{cases} \tag{5}$$

Pour le système (4). En appliquant par exemple la méthode de Cramér. On a: $\begin{vmatrix} t & -1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)^2$. Il faut donc traiter les cas $t \neq 1, -1, t = 1$ et $t = -1$, Pour le système (5). En appliquant par exemple la méthode de Cramér. On a: $\begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ 2 & t \end{vmatrix} = t^2 - t - 2$, donc $t = 2$ et $t = -1$ sont solutions. Il faut donc traiter les cas $t \neq \{-1, 2\}$, $t = 2$, $t = -1$.

3 Diagonalisation des matrices

On considère la matrice à **valeurs complexes**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \tag{6}$$

- Déterminer le polynôme caractéristique de A.
- Le polynôme caractéristique est égale à $\lambda^2 + 1$
- En déduire les valeurs propres de A.

- Ce polynôme admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ i et $-i$ (mais pas dans $\mathbb{R}$).
- Montrer que:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

  sont deux vecteurs propres.
- Un calcul immédiat montre que $M\vec{v}_1 = i\vec{v}_1$ et $M\vec{v}_2 = -i\vec{v}_2$
- Déterminer la matrice de passage P de la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$.
- La matrice de passage est: $\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$
- En déduire que A est semblable à une matrice diagonale dans les nombres complexes.
- D'abord on calcule P^{-1} on trouve: $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{i-1} \\ \frac{1}{i-1} & 1 \end{pmatrix}$ On applique ensuite la formule de changement de base et on trouve: $P^{-1}AP = \Delta = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. On dit que A et Δ sont deux matrices semblables.