Série de Travaux Dirigés

L3 électronique

Septembre 2024

1 Questions de cours

Soit la famille $\mathcal{A} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$ une famille de m vecteurs dans un espace vectoriel U.

- Donner la définition d'une famille génératrice, et libre appliqué à la famille $\mathcal{A}$.
- Si $\mathcal{A}$ est une base de U, quel est le type de U ?
- Donnez la définition du sous-espace engendré par $\mathcal{A}$ noté Vect($\mathcal{A}$) ?

Soit

$$\begin{cases} f: & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ & X \mapsto AX \end{cases} \tag{1}$$

- Quelle est la dimension de la matrice A ?
- Donner la définition du noyau de f. Interprétez-le.
- Selon le déterminant de le matrice A, que pouvez-vous déduire sur la dimension du noyau de f ?
- Énoncer le théorème du rang appliqué à f.
- Sous quelle condition la matrice A est-elle inversible ?
- Donner la définition d'un vecteur propre et une valeur propre de la matrice A.

2 Application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par: $f(x, y, z) = (-17x + 3y + 9z, -54x + 7y + 27z, -12x + 3y + 7z)$.

- Ecrire la matrice de l'application linéaire f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Calculer sa trace.

- Calculer son déterminant.
- On considère la base $B = (1, 0, 2), (0, -3, 1), (1, 2, 1)$. Exprimer la matrice de f dans cette nouvelle base.
- Ecrire la matrice de passage de la base B vers la base canonique.
- Calculer son inverse.
- Que représente $P^{-1}MP$?

3 Diagonalisation des matrices

3.1 Exercice 3.1

On considère la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 7 & -2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

- Calculer le polynôme caractéristique de A.
- Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $\det(A - \lambda I_3) = 0$.
- Déterminer le rang de la matrice $A - 3I$.
- On pose:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

- Montrer que $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ sont des vecteurs propres. Déterminer leur valeur propre.
- Considérons $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, montrer que $\mathcal{B}$ est une base $\mathbb{R}^3$.
- Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Calculer l'inverse de P.
- Calculer $P^{-1}AP$.
- Donner l'expression des puissances de la matrice A, A^k.