Fonctions de la variable complexe

Corrigé TD1

Octobre 2024

1 Fonctions multiformes

I. Soit la fonction multiforme:

$$f(z) = (z-1)^{\frac{1}{3}} \tag{1}$$

- Quelle est la forme générale des déterminations de rang k de la fonction f ?
- Définir la détermination qui prend la valeur $2^{\frac{1}{3}}$ au point $z = 3$ et qui admet pour domaine de définition $\mathbb{C}$ privé de $]-\infty, 1]$.
- Quelles sont les valeurs de cette détermination sur les bords supérieurs et inférieurs de la coupure.

On pose $z-1 = \rho e^{i\theta+i2k\pi}$, pour que le domaine de la définition soit $\mathbb{C}\ ]-\infty, 1]$, il faut couper le plan complexe par la demi-droite $]-\infty, 1]$ donc $\theta \in]-\pi, \pi[$. on a $f_k(z) = \rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i\theta+i2k\pi}{3}}$.

Au point $z = 3$, on a $\theta = 0$ et $\rho = 2$. Donc $f_k(3) = 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2k\pi}{3}}$. Il suffit donc de choisir, $k = 0$ pour avoir $f_k(3) = 2^{\frac{1}{3}}$. C'est la détermination principle de f définie par:

$$f_k(3) = \rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i\theta}{3}}, \theta \in]-\pi, \pi[. \tag{2}$$

Sur le bord inférieur de la coupure on a $\theta = -\pi$ et $\rho = 1-x$ donc: $f_k(z) = (1-x)^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{i\pi}{3}}$.

Sur le bord supérieur de la coupure on, $\theta = \pi$ et $\rho = 1-x$ donc: $f_k(z) = (1-x)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i\pi}{3}}$.

II. Soit la fonction multiforme:

$$f(z) = (z-1)^{\frac{1}{2}} \log(3-z) \tag{3}$$

- Quelle est la forme générale des déterminations de rang k de la fonction f ?
- Définir la détermination qui prend la valeur $-i\pi\sqrt{3}$ au point $z = 4$ et qui admet pour domaine de définition $\mathbb{C}$ privé de $]-\infty, 3]$.

- Quelles sont les valeurs de cette détermination sur les bords supérieurs et inférieurs de la coupure.

On considère la fonction $f(z) = \sqrt{z-1}\,\log(3-z)$.

1) Détail des notations et expressions de $\sqrt{z-1}$ et $\log(3-z)$

Posons $z - 1 = re^{i(\theta+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$ et $z - 3 = r_0 e^{i(\theta_0+2k_0\pi)}$, $k_0 \in \mathbb{Z}$.

Comme $3 - z = -(z-3) = e^{i\pi}(z-3)$, on obtient successivement

$$\log(3-z) = \ln r_0 + i(\theta_0 + 2k_0\pi) + i\pi,$$

et

$$\sqrt{z-1} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2}}.$$

Nous obtenons donc :

$$f_{k,k_0}(z) = \{\ln r_0 + i(\theta_0 + 2k_0\pi) + i\pi\}\,\sqrt{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2}}, \quad k, k_0 \in \mathbb{Z}.$$

Au point $z = 4$, on a $\theta_0 = 0$, $r_0 = 1$, $\theta = 0$ et $r = 3$.

Pour obtenir $f_{k,k_0}(4) = -i\pi\sqrt{3}$, il faut et il suffit que $e^{ik\pi}(1+2k_0) = -1$ On a donc deux possibilités soit:

$$e^{ik\pi} = -1 \quad \text{et} \quad (1+2k_0) = 1.$$

$$e^{ik\pi} = 1 \quad \text{et} \quad (1+2k_0) = -1.$$

On a deux déterminations possible, si k est pair (par exemple $k = 0$) et $k_0 = -1$. On obtient donc :

$$f(z) = \{\ln r_0 + i\theta_0 - i\pi\}\,\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad (\theta, \theta_0) \in]-\pi, +\pi[^2,\ r > 0,\ r_0 > 0.$$

Dans le cas où k est impair (par exemple $k = 1$) et $k_0 = 0$, on obtient :

$$f(z) = \{\ln r_0 + i\theta_0 + i\pi\}\left(-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right), \quad (\theta, \theta_0) \in]-\pi, +\pi[^2,\ r > 0,\ r_0 > 0.$$

2) Analyse sur le bord inférieur de la coupure

Deux régions apparaissent sur le bord inférieur de la coupure :

- **Pour** $z = x + iy$ avec $x < 1$ et $y < 0$:

  $$\theta = -\pi, \quad \theta_0 = -\pi, \quad r = 1 - x, \quad r_0 = 3 - x.$$

  Pour la première détermination, on a :

  $$f(z) = \{\ln(3-x) - 2i\pi\}\left(-i\sqrt{1-x}\right),$$

  et pour la deuxième détermination :

  $$f(z) = \{\ln(3-x)\}\left(i\sqrt{1-x}\right).$$

- **Pour** $z = x + iy$ avec $1 < x < 3$ et $y < 0$:

$$\theta = 0, \quad \theta_0 = -\pi, \quad r = x - 1, \quad r_0 = 3 - x.$$

Pour la première détermination :

$$f(z) = \{\ln(3 - x) - 2i\pi\} \sqrt{x - 1},$$

et pour la deuxième détermination :

$$f(z) = \{\ln(3 - x)\} \left(-\sqrt{x - 1}\right).$$

D'où les deux déterminations possibles :

$$e^{ik\pi} = 1 \quad \text{et} \quad (1 + 2k_0) = -1,$$

ou bien

$$e^{ik\pi} = -1.$$

3) Analyse sur le bord supérieur de la coupure

Sur le bord supérieur de la coupure, on distingue également deux régions :

- **Pour** $z = x + iy$ avec $x < 1$ et $y > 0$:

$$\theta = \pi, \quad \theta_0 = \pi, \quad r = 1 - x, \quad r_0 = 3 - x.$$

Pour la première détermination :

$$f(z) = \ln(3 - x) \cdot i\sqrt{1 - x},$$

et pour la deuxième détermination :

$$f(z) = \{\ln(3 - x) + 2i\pi\} \left(-i\sqrt{1 - x}\right).$$

- **Pour** $z = x + iy$ avec $1 < x < 3$ et $y > 0$:

$$\theta = 0, \quad \theta_0 = \pi, \quad r = x - 1, \quad r_0 = 3 - x.$$

Pour la première détermination :

$$f(z) = \ln(3 - x)\sqrt{x - 1},$$

et pour la deuxième détermination :

$$f(z) = \{\ln(3 - x) + 2i\pi\} \left(-\sqrt{x - 1}\right).$$

2 Fonctions holomorphes

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{|z|}, z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Est-ce que f est holomorphe ? Pour $z = x + iy$, on a $f(x, y) = \frac{(x-iy)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{-2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

On poste $P(x, y) = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $Q(x, y) = \frac{-2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \tag{5}$$

$$= \frac{(2x)(\sqrt{x^2+y^2}) - (x^2-y^2)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \tag{6}$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \tag{7}$$

$$= \frac{-2x(\sqrt{x^2+y^2}) - (-2xy)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \tag{8}$$

Les conditions de Cauchy-Reiman ne sont pas vérifiées donc la fonction f n'est pas holomorphe.

Soit

$$V(x, y) = xy^2 - \frac{1}{3}x^3 \tag{9}$$

Trouver U tel que $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ soit holomorphe.

Pour que f soit holomorphe, il faut que f vérifie les conditions de Cauchy-Reimann:

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = y^2 - x^2 = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \tag{10}$$

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = 2xy = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \tag{11}$$

Donc en intégrant l'équation (10) on trouve;

$$U(x, y) = \frac{1}{3}y^3 - x^2y + g(x) \tag{12}$$

Pour déterminer la fonction $g(x)$ on utilise l'équation (11), on a:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = -2xy + g'(x) \tag{13}$$

Donc $g(x) =$ constante.

$$U(x, y) = \frac{1}{3}y^3 - x^2y + c \tag{14}$$