TD 2

Théorème des résidus

Novembre 2024

1 Calcul des résidus

Trouver les résidus des fonctions suivantes:

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)} \tag{1}$$

$$g(z) = \frac{1}{z(z+2)^3} \tag{2}$$

$$h(z) = \frac{ze^{zt}}{(z-3)^2} \tag{3}$$

$$m(z) = \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)} \tag{4}$$

$$n(z) = \frac{e^z}{\sin(z)} \tag{5}$$

$$Res(f,2) = \frac{4}{5} \tag{6}$$

$$Res(f,i) = \frac{1-2i}{10} \tag{7}$$

$$Res(f,-i) = \frac{1+2i}{10} \tag{8}$$

$$Res(g,0) = \frac{1}{8} \tag{9}$$

$$Res(g,-2) = -\frac{1}{8} \tag{10}$$

$$Res(h,3) = (1+3t)e^{zt} \tag{11}$$

$$Res(m,-1) = -\frac{14}{25} \tag{12}$$

$$Res(m,2i) = \frac{7-i}{25} \tag{13}$$

$$Res(m,-2i) = \frac{7+i}{25} \tag{14}$$

$$Res(n,k\pi) = (-1)^k e^{k\pi} \tag{15}$$

2 Application du théorème des résidus

1. Calculer $\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz$ pour $\mathcal{C}$ définie par

   a) $z = \frac{3}{2}e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$. En appliquant le théorème du résidu (en tenant compte uniquement des pôles à l'intérieur du cercle, i et $-i$. La valeur de cet intégrale est $2i\pi(\frac{1-2i}{10} + \frac{1+2i}{10})$

   b) $z = 10e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$ En appliquant le théorème du résidu la valeur de l'intégrale est $2i\pi(\frac{1-2i}{10} + \frac{1+2i}{10} + \frac{4}{5})$

2. $\int_{\mathcal{C}} g(z)\, dz$ pour $\mathcal{C}$ définie par

   a) $z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$ En appliquant le théorème du résidu (en tenant compte uniquement du pôle 0, la valeur de l'intégrale est $2i\pi(\frac{1}{8})$

   b) $z = 3e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$. En appliquant le théorème du résidu (en tenant compte uniquement du pôle 0, la valeur de l'intégrale est $2i\pi(\frac{1}{8} - \frac{1}{8})$.

3. $\int_{\mathcal{C}} h(z)\, dz$ pour $\mathcal{C}$ définie par

   a) $z = 4e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$ En appliquant le théorème du résidu (en tenant compte uniquement du pôle 0, la valeur de l'intégrale est $2i\pi(1 + 3t)e^{zt}$.