TD2 Espaces Euclidiens

L3 électronique

Septembre 2025

1 Formes bilinéaires de $\mathbb{R}^n$

On considère les applications suivantes:

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto \pi.x_1.y_1 + 2.x_1.y_2 - x_2.y_1 + 3x_2y_2 \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3 \end{array} \tag{2}$$

- Montrer qu'il s'agit de formes bilinéaires.
- Donner la matrice associée à ces formes bilinéaires dans leur bases canoniques.
- Déterminer si elles sont symétriques.
- Pour les matrices symétriques, déterminer si elles sont définies positives.

2 Produit scalaire sur les matrices

Dans l'espace vectoriel des matrice carrés à valeurs réelles:

$$\langle .,. \rangle, \begin{array}{l} M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\mathbb{R} \\ (A, B) \mapsto Tr(A^\top B) \end{array} \tag{3}$$

- Montrer que l'application $\langle .,. \rangle$ est une forme bilinéaire.
- Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
- Décrire la norme associée à ce produit scalaire.
- Trouver une base orthonormée de cet espace euclidien.

3 Matrice Orthogonale

On considère la matrice:

$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

- Montrer que pour tout θ, cette matrice est orthogonale.
- Que pouvez-vous conclure sur les vecteurs colonnes de la matrice ?
- Que représente cette matrice géométriquement ?

4 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

- Orthonoramliser la base suivante de $\mathbb{R}^3$ (p.197):

$$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{f_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

5 Matrice symétrique

On considère la matrice:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Soit ϕ l'application bilinéaire dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- Que vaut $\phi\left((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right)$?
- Est-ce que la matrice M est diagonalisable ?
- Calculer les valeurs propres de la matrice M.
- Donner une base orthonormée de M.
- Donner l'expression de ϕ dans cette nouvelle base.

6 Solution des moindres carrés

Quelle est la meilleure solution approchée au problème $Ax = b$ avec,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \tag{7}$$