Série de Travaux Dirigés 2

L3 électronique

Septembre 2024

1 Questions de cours

- Montrer que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + z = 0\}$. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$v1 = (1, -3, -5) \tag{1}$$
$$v2 = (3, 4, -2) \tag{2}$$
$$v3 = (1, 10, 8) \tag{3}$$

  - Ces vecteurs sont-ils libres ?
  - Quel est la dimension du sous-espace engendré par ces vecteurs ?

- Considérons le système homogène $AX = b$ ou A est une matrice carré d'ordre n. Quelles sont les solutions possible de ce système d'équations linéaires selon la valeur de b?

2 Systèmes d'équations linéaires

Résoudre selon la valeur de $t \in \mathbb{R}$ le système d'équations linéaires:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + t^2 y = t \end{cases} \tag{4}$$

Résoudre les sytèmes d'équations linéaires suivants:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 - 11x_3 + 6x_4 \end{cases} \tag{6}$$

3 Diagonalisation des matrices

On considère la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

- Calculer le polynôme caractéristique de A.
- Déterminer l'ensemble des valeurs propres.
- Déterminer le rang de la matrice $A - 3I$.
- On pose:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

- Montrer que $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ sont des vecteurs propres.
- Considérons $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, montrer que $\mathcal{B}$ est une base $\mathbb{R}^3$.
- Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Calculer l'inverse de P.
- Calculer $P^{-1}AP$.
- En déduire des propriétés (déterminant, trace, inversibilité, puissance..) sur la matrice A.

Corrigé de la Série de Travaux Dirigés 2

L3 électronique

Septembre 2024

1 Questions de cours

1.1 Sous-espace vectoriel

L'ensemble $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Pour le prouver, il faut vérifier les propriétés suivantes :

- L'ensemble S contient le vecteur nul. En effet, pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, on obtient $2(0) - 0 + 0 = 0$, donc le vecteur nul appartient à S.
- S est stable par addition. Soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) deux éléments de S, donc $2x_1 - y_1 + z_1 = 0$ et $2x_2 - y_2 + z_2 = 0$. En ajoutant ces deux équations, on obtient :

  $$2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 0,$$

  ce qui montre que $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ appartient à S.
- S est stable par multiplication scalaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z) \in S$, donc $2x - y + z = 0$. En multipliant cette équation par λ, on obtient :

  $$2(\lambda x) - (\lambda y) + (\lambda z) = 0,$$

  ce qui montre que $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in S$.

Ainsi, S est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1.2 Vecteurs dans $\mathbb{R}^3$

Les vecteurs donnés sont :

$$v_1 = (1, -3, -5), \quad v_2 = (3, 4, -2), \quad v_3 = (1, 10, 8).$$

- Pour vérifier si ces vecteurs sont linéairement indépendants, on forme la matrice A dont les colonnes sont ces vecteurs :

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 10 \\ -5 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

On calcule le déterminant de cette matrice :

$$\det(A) = 0.$$

Après calcul, on trouve $\det(A) = 0$, ce qui signifie que les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants.

- En échelonnant la matrice A on trouve rang(A)=2.

1.3 Système homogène $AX = b$

Le système homogène $AX = b$ où A est une matrice carrée d'ordre n peut avoir les solutions suivantes :

- Si $b = 0$, le système est homogène, et la solution est donnée par le noyau de la matrice A. Si $\det(A) \neq 0$, alors $X = 0$ est l'unique solution. Si $\det(A) = 0$, le système admet une infinité de solutions.
- Si $b \neq 0$, le système est non-homogène. Si $\det(A) \neq 0$, le système a une unique solution. Si $\det(A) = 0$, il n'y a pas de solution ou une infinité de solutions, selon la valeur de b.

2 Systèmes d'équations linéaires

2.1 Système avec paramètre t

On considère le système :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + t^2 y = t \end{cases}$$

Soustrayons la première équation de la deuxième :

$$(t^2 - 1)y = t - 1.$$

Si $t = 1$, l'équation devient $0 = 0$, donc le système est redondant, et il y a une infinité de solutions données par $x + y = 1$. Si $t \neq 1$, on obtient :

$$y = \frac{t-1}{t^2-1}, \quad x = 1 - y.$$

2.2 Autres systèmes d'équations linéaires

La résolution des autres systèmes se fait en appliquant la méthode du pivot de Gauss. Voici les résultats pour chaque système :

- Pour le premier système :

$$\begin{cases} x_1 = -20x_5 \\ x_2 = 7x_5 \\ x_3 = -20x5 \\ x_4 = 2x_5 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

Ce système a une infinité de solutions, avec x_5 paramétré.

- Pour le second système : Ce système admet un infinité de solutions

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x2 = x2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Ce système a une infinité de solutions, avec x_5 paramétré.

Outils: Je vous recommande la solveuse linéaire disponible sur https://wims.univ-cotedazur.fr/wims/wims.cgi pour vérifier vos pivots de Gauss.

3 Diagonalisation des matrices

3.1 Polynôme caractéristique

La matrice A est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est donné par :

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Après calcul (soit par la méthode de Sarrus, soit par la méthode du développement des cofacteurs), on trouve :

$$P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$.

3.2 Vecteurs propres et diagonalisation

- On vérifie par calcul que $A\vec{u}_1 = 2\vec{u}_1$, $A\vec{u}_2 = 3\vec{u}_2$ et $A\vec{u}_3 = \vec{0}$.
- $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, car les vecteurs sont linéairement indépendants (Soit on échelonne la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, ou par simple calcul du déterminant on montre qu'elle est de rang plein).
- La matrice de passage P est donnée par $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Par calcul on trouve $P^{-1}AP$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice A est diagonalisable, son déterminant est $\det(A) = 0$, sa trace est $\mathrm{Tr}(A) = 5$, elle n'est pas inversible, et les puissances de A sont faciles à calculer via sa forme diagonale.

$$A^k = P \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \tag{1}$$