TD3 Espaces Euclidiens - Corrigé

L3 électronique

Octobre 2024

1 Formes bilinéaires de $\mathbb{R}^n$

On considère les applications suivantes :

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\\&((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto \pi.x_1.y_1 + 2.x_1.y_2 - x_2.y_1 + 3x_2y_2\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\\&((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3\end{aligned} \tag{2}$$

- **Montrer qu'il s'agit de formes bilinéaires** :
  Ces applications sont bilinéaires car elles sont linéaires par rapport à chaque variable. Cela signifie que pour chaque variable fixée, l'application est une forme linéaire par rapport à l'autre variable.

- **Donner la matrice associée à ces formes bilinéaires dans leur base canonique** :
  Pour la première application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la matrice associée est :

  $$A = \begin{pmatrix} \pi & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

  Pour la seconde application $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, la matrice associée est :

  $$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Déterminer si elles sont symétriques** :
  - La première matrice n'est pas symétrique car $A_{12} \neq A_{21}$. - La deuxième matrice est symétrique car $B = B^\top$.

- **Pour les matrices symétriques, déterminer si elles sont définies positives** :
  Pour la deuxième matrice B on applique le critère de Sylvester, on a: $\delta_1 = |2| = 2 > 0$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$ et $\delta_3 = det(B) = 1 > 0$ donc B est définie-positive.

2 Produit scalaire sur les matrices

Dans l'espace vectoriel des matrices carrées à valeurs réelles :

$$\langle .,. \rangle, \quad \begin{array}{l} M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ (A,B) \mapsto Tr(A^\top B) \end{array} \tag{3}$$

2.1 1. Bilinéarité de l'application

On commence par montrer la linéarité à gauche. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $A_1, A_2, B \in M_2(\mathbb{R})$. La linéarité de la transposée et de la trace impliquent :

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, B \rangle &= \mathrm{tr}((\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)^\top B) \\ &= \mathrm{tr}((\lambda_1 A_1^\top + \lambda_2 A_2^\top) B) \\ &= \mathrm{tr}(\lambda_1 A_1^\top B + \lambda_2 A_2^\top B) \\ &= \lambda_1 \mathrm{tr}(A_1^\top B) + \lambda_2 \mathrm{tr}(A_2^\top B) \\ &= \lambda_1 \langle A_1, B \rangle + \lambda_2 \langle A_2, B \rangle. \end{aligned}$$

La linéarité à droite se montre de la même manière. Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ et $A, B_1, B_2 \in M_2(\mathbb{R})$. La linéarité de la trace implique :

$$\begin{aligned} \langle A, \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 \rangle &= \mathrm{tr}(A^\top (\mu_1 B_1 + \mu_2 B_2)) \\ &= \mathrm{tr}(\mu_1 A^\top B_1 + \mu_2 A^\top B_2) \\ &= \mu_1 \mathrm{tr}(A^\top B_1) + \mu_2 \mathrm{tr}(A^\top B_2) \\ &= \mu_1 \langle A, B_1 \rangle + \mu_2 \langle A, B_2 \rangle. \end{aligned}$$

Donc, la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire.

Symétrie :

Rappelons que la trace est invariante par transposition, c'est-à-dire $\mathrm{tr}(M^\top) = \mathrm{tr}(M)$, et que la transposée d'un produit de matrices est égale au produit, dans le sens inverse, des transposées des matrices, c'est-à-dire $(MN)^\top = N^\top M^\top$. De ces deux propriétés, on déduit la symétrie de la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de la manière suivante :

$$\langle B, A \rangle = \mathrm{tr}(B^\top A) = \mathrm{tr}((A^\top B)^\top) = \mathrm{tr}(B^\top A^\top) = \mathrm{tr}(A^\top B) = \langle A, B \rangle.$$

Positivité :

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille 2×2, elle s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$A^\top A = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}(A^\top A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0.$$

Définition positive :
Le calcul précédent montre que si une matrice A est telle que $\langle A, A\rangle = 0$, cela signifie que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$. Donc tous ses coefficients sont nuls et $A = 0$.

Au final, cela montre que la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

La norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie par la formule :

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ désigne les coefficients de la matrice A.

3 Matrice Orthogonale

On considère la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

- **Montrer que pour tout θ, cette matrice est orthogonale** :
  Une matrice est orthogonale si $P^\top P = I$. En calculant $P^\top P$, on trouve bien la matrice identité, donc P est orthogonale.

$$P^T P = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Que pouvez-vous conclure sur les vecteurs colonnes de la matrice ?** :
  Les colonnes de P forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

- **Que représente cette matrice géométriquement ?** :
  Cette matrice représente une rotation dans le plan (x_1, x_2) autour de l'axe x_3 d'un angle θ.

4 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Orthonormaliser la base suivante de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{f_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Résultat après Gram-Schmidt** : On utilise l'algorithme de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée. Le calcul donne :

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{f}_2 - \langle \vec{f}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1}{\|\vec{f}_2 - \langle \vec{f}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1\|}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{f}_3 - \langle \vec{f}_3, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 - \langle \vec{f}_3, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2}{\|\vec{f}_3 - \langle \vec{f}_3, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 - \langle \vec{f}_3, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2\|}$$

1. La norme du vecteur $\vec{f}_1$:

$$\|\vec{f}_1\| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3.$$

On normalise $\vec{f}_1$ pour trouver le vecteur unitaire $\vec{e}_1$.

2. En effectuant la projection de f_2 sur la droite engendrée par $\vec{u}_1$ note $\mathcal{F}$, on a:

$$\langle \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle \vec{u}_1 = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La projection orthogonale est donc :

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{F}}^{\perp}(\vec{f}) = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. Le vecteur $\vec{f}$ moins son projeté sur $\mathcal{F}$ donne le vecteur orthogonal à $\mathcal{F}$ suivant :

$$\vec{f}_2 - \mathrm{proj}_{\mathcal{F}}^{\perp}(\vec{f}_2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La norme de ce vecteur vaut :

$$\|\vec{f}_2 - \mathrm{proj}_{\mathcal{F}}^{\perp}(\vec{f}_2)\| = 1.$$

Pas besoin de le normaliser; on obtient ainsi le deuxième vecteur de la base orthonormée.

2. On considère le plan $\mathcal{F}$ engendré par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Le projeté orthogonal de $\vec{f}_3$ dessus est :

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{F}}(\vec{f}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La différence entre le vecteur $\vec{f}_3$ et son projeté sur $\mathcal{F}$ donne le vecteur orthogonal suivant :

$$\vec{f}_3 - \mathrm{proj}_{\mathcal{F}}(\vec{f}_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La norme de ce vecteur vaut :

$$\|\vec{f}_3 - \mathrm{proj}_{\mathcal{F}}(\vec{f}_3)\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4+4+1} = 3.$$

5 Matrice Symétrique

On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- **Que vaut $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$?** :
  $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 4x_1y_1+3x_1y_2+3x_1y_3+3x_2y_1+4x_2y_2+3x_2y_3+3x_3y_1 + 3x_3y_2 + 4x_3y_3$

- **Est-ce que la matrice M est diagonalisable ?** :
  Oui, M est une matrice symétrique donc elle est toujours diagonalisable.

- **Calculer les valeurs propres de la matrice M** :
  Le polynôme caractéristique est $det(A-\lambda I) = (\lambda-1)^2(\lambda-10)$ Les valeurs propres de M sont donc 10, 1.

- **Donner une base orthonormée de M** :
  On voit que $(1, 1, -2)$ et $(1, -1, 0)$ sont deux vecteurs sont deux solution du système d'équations linéaires $Mx = x$, de plus ils sont orthogonaux :

  $$\langle (1, 1, -2), (1, -1, 0)\rangle = 1 - 1 + 0 = 0.$$

  Il ne reste plus qu'à les normaliser pour obtenir les deux vecteurs suivants :

  $$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \right\}.$$

  Ensuite, il faut trouver une solution de $Mx = 10x$, on trouve que $(1, 1, 1)$ est une solution de ce système et donc le vecteur propre orthonormé $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$
  Au final, cela fournit la base orthonormée suivante de vecteurs propres de la matrice M :

  $$B := \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \right\}.$$

- **Donner l'expression de ϕ dans cette nouvelle base** :
  Soit

  $$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{5}$$

  la matrice de passage vers cette nouvelle base dans la base canonique. Cette base étant orthonormée, la matrice P est orthogonale, c'est-à-dire que $P^{-1} = P^\top$. La diagonalisation de la matrice M donne :

  $$P^\top MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$