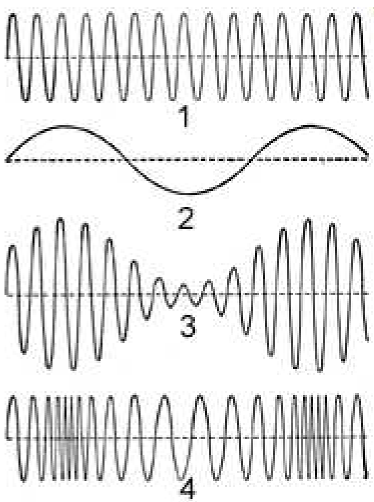
Outils Mathématiques

L3 - Electronique

Outils Mathématiques

3ème Partie



Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.1 Généralités

3.2 Fonctions usuelles

3.3 Fonctions holomorphes

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

3.5 Théorème des résidus

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.1 Généralités

plan complexe

=> plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; u, v)$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.1 Généralités

plan complexe

=> plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; u, v)$

correspondance

– $\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto & z = x + iy \end{array} \right.$ bijection

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.1 Généralités

plan complexe

=> plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; u, v)$

correspondance

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & z = x + iy \end{cases} \qquad \text{bijection}$$

On confond le point $M(x, y)$ et son affixe $z = x + iy$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.1 Généralités

Si $z \neq 0$

=> représentation du nombre complexe z sous la forme module/argument $z = \rho e^{i\theta}$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.1 Généralités

Si $z \neq 0$

=> représentation du nombre complexe z sous la forme module/argument $z = \rho e^{i\theta}$

où $\rho = |z| = OM =$ module de z

et $\theta = \arg z =$ mesure en radians de l'angle $\left(u, \overrightarrow{OM} \right)$

définie modulo 2π

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.1 Généralités

Si $z \neq 0$

=> représentation du nombre complexe z sous la forme module/argument $z = \rho e^{i\theta}$

où $\rho = |z| = OM =$ module de z

et $\theta = \arg z =$ mesure en radians de l'angle $\left(u, \overrightarrow{OM}\right)$ définie modulo 2π

<=> à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.1 Généralités

A toute fonction f de la variable complexe :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = A(x, y) + iB(x, y) \end{array} \right.$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.1 Généralités

A toute fonction f de la variable complexe :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = A(x,y) + iB(x,y) \end{array} \right.$$

on associe une fonction F :

$$F : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & F(x,y) = (A(x,y), B(x,y)) \end{array} \right.$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.1 Généralités

$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|z\| = |z|$

Soient f une fonction de la variable complexe

$z_0 = x_0 + iy_0$ et l deux nombres complexes

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.1 Généralités

$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni de la norme $||z|| = |z|$

Soient f une fonction de la variable complexe

$z_0 = x_0 + iy_0$ et l deux nombres complexes

Définition : limite

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = l \text{ ou } f(z) \underset{z \longrightarrow z_0}{\longrightarrow} l$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.1 Généralités

$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni de la norme $||z|| = |z|$

Soient f une fonction de la variable complexe

$z_0 = x_0 + iy_0$ et l deux nombres complexes

Définition : limite

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = l \text{ ou } f(z) \underset{z \longrightarrow z_0}{\longrightarrow} l$$

<=> $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad |z - z_0| < \eta \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.1 Généralités

Définition : continuité

$$
\begin{aligned}
f \text{ continue en } z_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \\
&\Longleftrightarrow \quad A(x,y) \text{ et } B(x,y) \text{ continues en } (x_0, y_0)
\end{aligned}
$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.1 Généralités

Définition : continuité

$$
\begin{aligned}
f \text{ continue en } z_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \\
&\Longleftrightarrow \quad A(x,y) \text{ et } B(x,y) \text{ continues en } (x_0, y_0)
\end{aligned}
$$

Attention !

Si $A(x,y)$ continue au point (x_0, y_0), alors

$$
\left\{ \begin{array}{lll} x \mapsto A(x, y_0) & \text{est continue en} & x = x_0 \\ y \mapsto A(x_0, y) & \text{est continue en} & y = y_0 \end{array} \right.
$$

Mais la réciproque est fausse !

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.1 Généralités

L'infini complexe noté ∞

=> l'unique nombre complexe satisfaisant les propriétés

$$\begin{aligned} \infty \times \infty &= \infty, |\infty| = \infty \\ \infty / a &= \infty, a/\infty = 0, a \times \infty = \infty \end{aligned}$$

avec $a \in \mathbb{C}$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.1 Généralités

L'infini complexe noté ∞

=> l'unique nombre complexe satisfaisant les propriétés

$$\begin{aligned} \infty \times \infty &= \infty, |\infty| = \infty \\ \infty / a &= \infty, a/\infty = 0, a \times \infty = \infty \end{aligned}$$

avec $a \in \mathbb{C}$

- Extensions des notions de limites au voisinage de l'infini

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions algébriques

Fonctions	Définition	Continuité	T_{G} associée
$z \longmapsto z + a$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	Translation
$z \longmapsto a\ z$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	Similitude
$z \longmapsto \frac{1}{z}$	$\mathbb{C}^*$	$\mathbb{C}^*$	Inversion puis symétrie Ox
$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$	$\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$	$\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$	...

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions définies par des séries entières

- <u>fonction exponentielle</u> : définition $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions définies par des séries entières

- <u>fonction exponentielle</u> : définition $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

propriétés

$$\begin{aligned} e^z\big|_{z=x} &= e^x \\ e^{z_1+z_2} &= e^{z_1}\, e^{z_2} \\ e^{x+iy} &= e^x\,(\cos y + i \sin y) \\ e^{-z} &= \frac{1}{e^z} \end{aligned}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions définies par des séries entières

- <u>fonction exponentielle</u> : définition $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

propriétés

$$\begin{aligned} e^z\big|_{z=x} &= e^x \\ e^{z_1+z_2} &= e^{z_1}\, e^{z_2} \\ e^{x+iy} &= e^x\,(\cos y + i \sin y) \\ e^{-z} &= \frac{1}{e^z} \end{aligned}$$

=> mêmes relations fonctionnelles que dans $\mathbb{R}$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions définies par des séries entières

- <u>fonctions hyperboliques</u> :

=> $$ch\ z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad sh\ z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad thz = \frac{shz}{chz}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions définies par des séries entières

- **fonctions hyperboliques** :

=> $$ch\ z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad sh\ z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad thz = \frac{shz}{chz}$$

- **fonctions trigonométriques** :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions définies par des séries entières

- propriétés :

Fonctions	Ensemble de définition	Ensemble de Continuité
exp	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
ch	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
sh	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
th	$\mathbb{C} \setminus \left\{ i \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{C} \setminus \left\{ i \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z} \right\}$
cos	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
sin	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
tan	$\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions définies par des séries entières

- formules de passage :

$$\left\{\begin{array}{c} \cos iz = ch\ z \\ \sin iz = i\ sh\ z \\ \tan\ iz = i\ th\ z \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{c} ch\ iz = \cos z \\ sh\ iz = i \sin z \\ th\ iz = i\ \tan\ z \end{array}\right.$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions multiformes

- définitions :

- Une fonction f est appelée **uniforme** si à chaque valeur de z ne correspond qu'une seule valeur de $f(z)$

ex. : e^z

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions multiformes

- définitions :

- Une fonction f est appelée **uniforme** si à chaque valeur de z ne correspond qu'une seule valeur de $f(z)$

ex. : e^z

- Une fonction f est appelée **multiforme** si à chaque valeur de z correspondent plusieurs valeurs de $f(z)$

ex. : $\arg z$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions multiformes

Pour étudier les fonctions multiformes, on les « rend uniformes » par la définition de leurs déterminations de rang k

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions multiformes

Pour étudier les fonctions multiformes, on les « rend uniformes » par la définition de leurs déterminations de rang k

Détermination de rang k de l'argument

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash Ox^{+} & \longrightarrow &]2k\pi, 2(k+1)\pi[\\ z & \longmapsto & \theta = \arg_k z \end{array}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions multiformes

Pour étudier les fonctions multiformes, on les « rend uniformes » par la définition de leurs déterminations de rang k

Détermination de rang k de l'argument

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}\backslash Ox^{+} & \longrightarrow &]2k\pi, 2(k+1)\pi[\\ z & \longmapsto & \theta = \arg_k z \end{array}$$

Rq. : Le demi-axe Ox^{+} est appelé l'axe de coupure
Quand $k = 0$, on parle de "détermination principale"

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonction argument : détermination de rang k

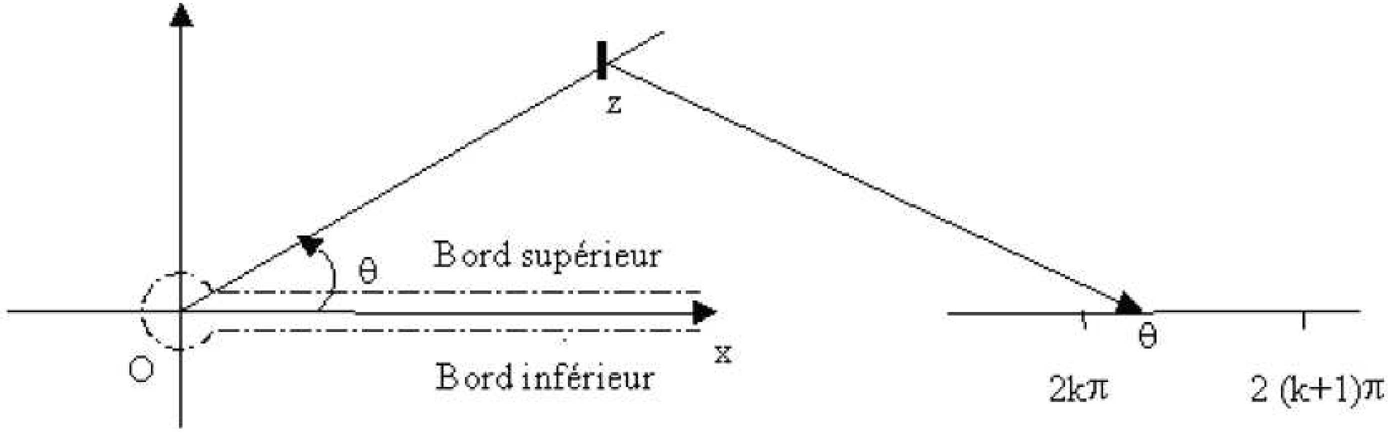
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} \backslash Ox^{+} & \longrightarrow &]2k\pi, 2(k+1)\pi[\\ z & \longmapsto & \theta = \arg_k z \end{array}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonction argument : détermination de rang k

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus Ox^+ & \longrightarrow &]2k\pi, 2(k+1)\pi[\\ z & \longmapsto & \theta = \arg_k z \end{array}$$



Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonction argument : autre définition

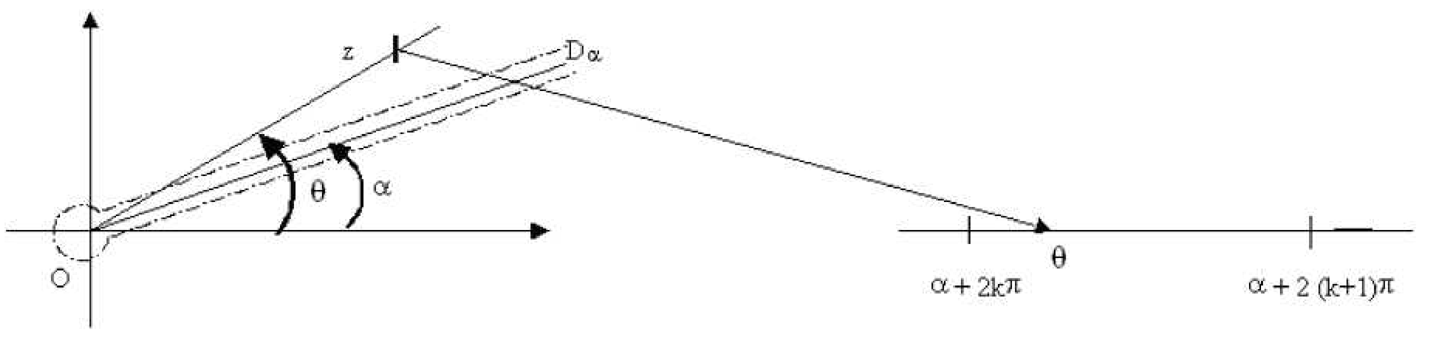
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}\backslash D_\alpha & \longrightarrow &]\alpha + 2k\pi, \alpha + 2(k+1)\pi[\\ z & \longmapsto & \theta = \arg_{k,\alpha} z \end{array}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonction argument : autre définition

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash D_\alpha & \longrightarrow &]\alpha + 2k\pi, \alpha + 2(k+1)\pi[\\ z & \longmapsto & \theta = \arg_{k,\alpha} z \end{array}$$

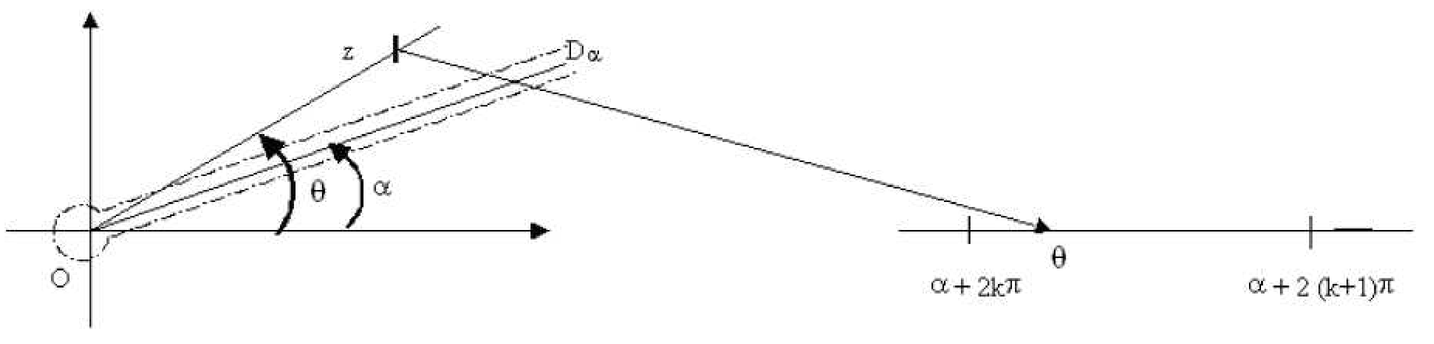


Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonction argument : autre définition

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash D_\alpha & \longrightarrow &]\alpha + 2k\pi, \alpha + 2(k+1)\pi[\\ z & \longmapsto & \theta = \arg_{k,\alpha} z \end{array}$$



Rq. : ► Avec cette définition, la demi-droite D_α d'origine O et d'angle α est la **coupure**

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions multiformes

Définitions

- Valeurs de continuité : Valeurs sur les bords supérieur et inférieur de la coupure

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions multiformes

Définitions

- Valeurs de continuité : Valeurs sur les bords supérieur et inférieur de la coupure
- Le point O origine de la coupure est appelé **point de branchement** ou **point de ramification**

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions multiformes

Remarques

- Chemins fermés entourant le point de branchement $\longrightarrow$ changement de détermination

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions multiformes

Remarques

- Chemins fermés entourant le point de branchement $\longrightarrow$ changement de détermination
- Chemins fermés n'entourant pas le point de branchement $\longrightarrow$ pas de changement de détermination

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions puissance

Détermination de rang k de $z \longmapsto z^{\frac{1}{n}}$

$$\left\{\begin{array}{ccl} \mathbb{C} \setminus Ox^{+} & \longrightarrow & S_k \\ z & \longmapsto & z_{(k)}^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \; e^{i\frac{1}{n}\arg_k(z)} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \end{array}\right. \qquad \theta \in \left]0, 2\pi\right[$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions puissance

Détermination de rang k de $z \longmapsto z^{\frac{1}{n}}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{C} \setminus Ox^+ & \longrightarrow & S_k \\ z & \longmapsto & z_{(k)}^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \; e^{i\frac{1}{n}\arg_k(z)} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \end{array} \right. \qquad \theta \in \,]0, 2\pi[$$

bijection de $\mathbb{C} \setminus Ox^+$ dans le secteur ouvert S_k délimité par les deux droites $D_{\frac{2k\pi}{n}}$ et $D_{\frac{2(k+1)\pi}{n}}$ issues de O et faisant respectivement avec Ox^+ les angles $\frac{2k\pi}{n}$ et $\frac{2(k+1)\pi}{n}$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions puissance $\quad z \longmapsto z^{\frac{1}{n}}$

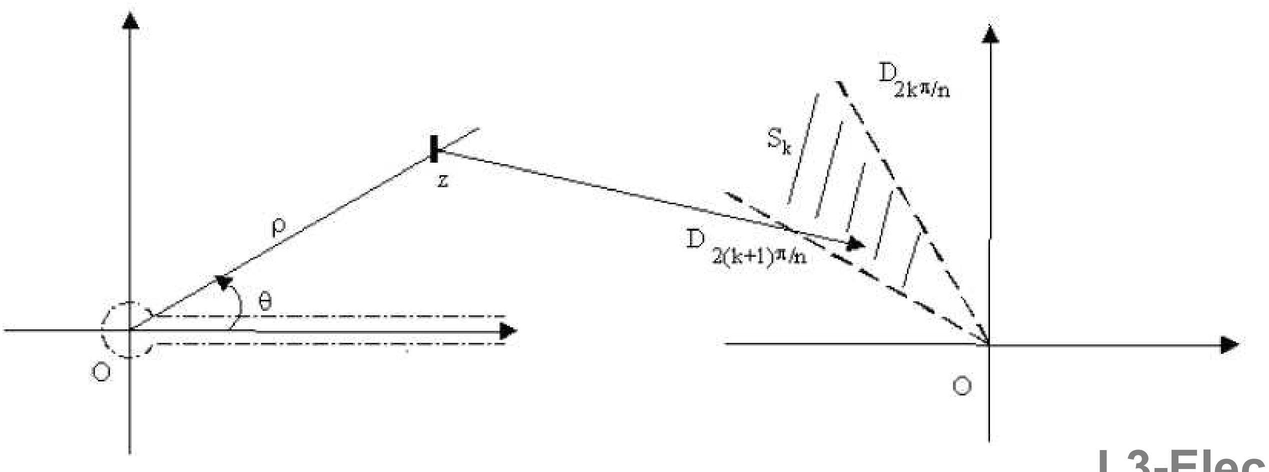
$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{C} \setminus Ox^+ & \longrightarrow & S_k \\ z & \longmapsto & z_{(k)}^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \; e^{i\frac{1}{n}\arg_k(z)} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \end{array}\right. \qquad \theta \in]0, 2\pi[$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonctions puissance $\quad z \longmapsto z^{\frac{1}{n}}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{C} \setminus Ox^{+} & \longrightarrow & S_k \\ z & \longmapsto & z_{(k)}^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \; e^{i\frac{1}{n}\arg_k(z)} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \end{array} \right. \qquad \theta \in \,]0, 2\pi[$$



Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonction logarithme

Détermination de rang k de $z \mapsto \log(z)$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mathbb{C} \setminus Ox^+ & \rightarrow & B_k & \\ z = |z|e^{i\theta + i2k\pi} & \mapsto & \log_k(z) & = \ln|z| + \arg_k(z) \\ & & & = \ln\rho + i\theta + i2k\pi \end{array} \right.$$

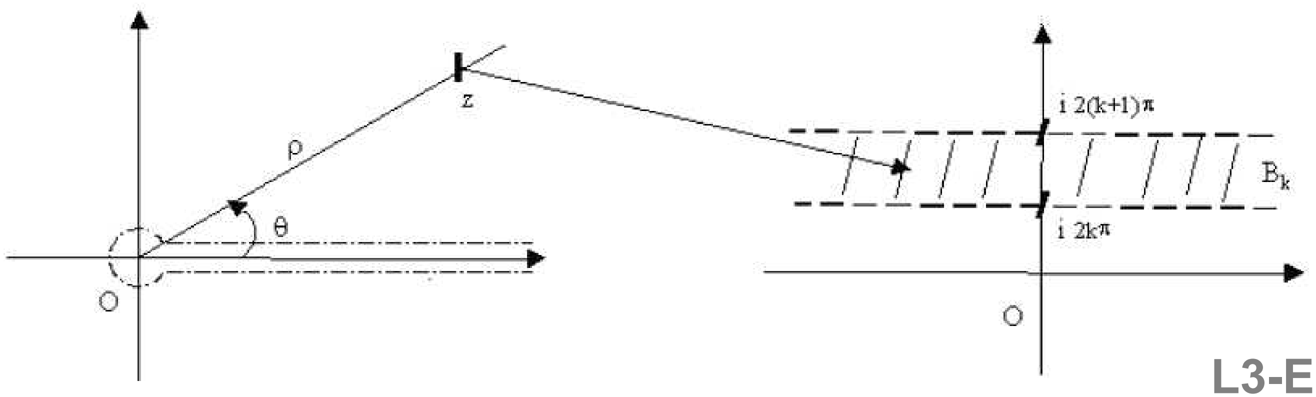
Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonction logarithme

Détermination de rang k de $z \mapsto \log(z)$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mathbb{C} \setminus Ox^+ & \to & B_k & \\ z = |z|e^{i\theta + i2k\pi} & \mapsto & \log_k(z) & = \ln|z| + \arg_k(z) \\ & & & = \ln\rho + i\theta + i2k\pi \end{array} \right.$$



Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.2 Fonctions usuelles

Fonction logarithme

Détermination de rang k de $z \mapsto \log(z)$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mathbb{C} \setminus Ox^+ & \rightarrow & B_k & \\ z = |z|e^{i\theta + i2k\pi} & \mapsto & \log_k(z) & = \ln|z| + \arg_k(z) \\ & & & = \ln\rho + i\theta + i2k\pi \end{array} \right.$$

Extension

- Fonction $z \mapsto z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ définie par $z_k^\alpha = e^{\alpha \log_k(z)}$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation d'une fonction de la variable complexe

Définition :

$f(z)$ dérivable en z_0 si et seulement si

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existe}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation d'une fonction de la variable complexe

Définition :

$f(z)$ dérivable en z_0 si et seulement si

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existe}$$

On note :

$$f\,'(z_0) = \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation d'une fonction de la variable complexe

Exemples :

Exemple 1

$f(z) = z$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1, \text{ donc } f \text{ est dérivable en } z_0$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation d'une fonction de la variable complexe

Exemples :

Exemple 1

$f(z) = z$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1, \text{ donc } f \text{ est dérivable en } z_0$$

Exemple 2

$f(z) = z^2$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0, \text{ donc } f \text{ est dérivable en } z_0$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation d'une fonction de la variable complexe

Contre-exemple

$g(z) = \overline{z}$

$$\frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \frac{(x - x_0) - i\,(y - y_0)}{(x - x_0) + i\,(y - y_0)}$$

$$= \frac{1 - i\,\frac{y - y_0}{x - x_0}}{1 + i\,\frac{y - y_0}{x - x_0}} = \frac{1 - im}{1 + im}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation d'une fonction de la variable complexe

Contre-exemple

$g(z) = \overline{z}$

$$\frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \frac{(x - x_0) - i\,(y - y_0)}{(x - x_0) + i\,(y - y_0)}$$

$$= \frac{1 - i\,\frac{y - y_0}{x - x_0}}{1 + i\,\frac{y - y_0}{x - x_0}} = \frac{1 - im}{1 + im}$$

qui dépend de la pente m du chemin donc :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} \text{ n'existe pas}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation d'une fonction de la variable complexe

Contre-exemple

$g(z) = \overline{z}$

$$\frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \frac{(x - x_0) - i\,(y - y_0)}{(x - x_0) + i\,(y - y_0)} = \frac{1 - i\,\frac{y - y_0}{x - x_0}}{1 + i\,\frac{y - y_0}{x - x_0}} = \frac{1 - im}{1 + im}$$

qui dépend de la pente m du chemin donc :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} \text{ n'existe pas}$$

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable en z_0

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation d'une fonction de la variable complexe

Propriété

Une fonction de la variable complexe f est dérivable au point $z_0 = x_0 + iy_0$

<=>

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation d'une fonction de la variable complexe

Propriété

Une fonction de la variable complexe f est dérivable au point $z_0 = x_0 + iy_0$

<=> ▸ $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont différentiables au point (x_0, y_0)

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Fonctions différentiables à deux variables

Une fonction $P(x, y)$ est différentiable au point (x_0, y_0) lorsqu'elle est définie dans un ouvert contenant ce point et que :

$$\Delta P = A(x_0, y_0)\, h + B(x_0, y_0)\, k + \|(h, k)\|\, \varepsilon(h, k)$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Fonctions différentiables à deux variables

Une fonction $P(x, y)$ est différentiable au point (x_0, y_0) lorsqu'elle est définie dans un ouvert contenant ce point et que :

$$\Delta P = A(x_0, y_0)\, h + B(x_0, y_0)\, k + \|(h, k)\|\, \varepsilon(h, k)$$

avec

$$\Delta P = P(x_0 + h, y_0 + k) - P(x_0, y_0)$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Fonctions différentiables à deux variables

Une fonction $P(x, y)$ est différentiable au point (x_0, y_0) lorsqu'elle est définie dans un ouvert contenant ce point et que :

$$\Delta P = A(x_0, y_0)\, h + B(x_0, y_0)\, k + \|(h, k)\|\, \varepsilon(h, k)$$

avec

$$\Delta P = P(x_0 + h, y_0 + k) - P(x_0, y_0)$$

et

$$\lim_{\|(h,k)\| \to 0} \varepsilon(h, k) = 0$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation d'une fonction de la variable complexe

Propriété

Une fonction de la variable complexe f est dérivable au point $z_0 = x_0 + iy_0$

<=>

- $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont différentiables au point (x_0, y_0)

et

- les conditions de Cauchy sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & = & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) & = & -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{array} \right.$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation d'une fonction de la variable complexe

Remarque

La démonstration de la C.N.S. de dérivabilité permet d'obtenir

$$
\begin{aligned}
f\,'(z_0) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \\
f\,'(z_0) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)
\end{aligned}
$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Définition

On appelle fonction holomorphe sur un ouvert A de $\mathbb{C}$ une fonction qui est dérivable en tout point de A. Notation : $f \in \mathcal{H}/A$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Définition

On appelle fonction holomorphe sur un ouvert A de $\mathbb{C}$ une fonction qui est dérivable en tout point de A. Notation : $f \in \mathcal{H}/A$

Propriétés

Les propriétés sont identiques à celles des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Définition

On appelle fonction holomorphe sur un ouvert A de $\mathbb{C}$ une fonction qui est dérivable en tout point de A. Notation : $f \in \mathcal{H}/A$

Propriétés

Les propriétés sont identiques à celles des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$

Soient f et $g \in \mathcal{H}/A$

- $\lambda f + \mu g \in \mathcal{H}/A$ et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f\,' + \mu g'$
- $fg \in \mathcal{H}/A$ et $(fg)' = f\,'g + fg'$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Propriétés

Les propriétés sont identiques à celles des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Propriétés

Les propriétés sont identiques à celles des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$

- Si $\forall z \in A, g(z) \neq 0$, alors :

$$\frac{1}{g} \in \mathcal{H}/A \text{ et } \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Propriétés

Les propriétés sont identiques à celles des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$

- Si $\forall z \in A, g(z) \neq 0$, alors :

$$\frac{1}{g} \in \mathcal{H}/A \text{ et } \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

- Si $f \in \mathcal{H}/A,\ g \in \mathcal{H}/f(A)$, alors :
  $(g \circ f) \in \mathcal{H}/A$ et $(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f\,'$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Propriétés

Les propriétés sont identiques à celles des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$

- Si $\forall z \in A, g(z) \neq 0$, alors :

$$\frac{1}{g} \in \mathcal{H}/A \text{ et } \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

- Si $f \in \mathcal{H}/A$, $g \in \mathcal{H}/f(A)$, alors :
  $(g \circ f) \in \mathcal{H}/A$ et $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$

- Si f est bijective de A sur $f(A)$, alors :

$$f^{-1} \in \mathcal{H}/f(A) \text{ et } \left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation des fonctions usuelles :

Fonctions algébriques

On dérive formellement par rapport à z comme pour les fonctions de la variable réelle par rapport à x :

$$\begin{aligned} (az)' &= a \\ (z^m)' &= mz^{m-1}, \quad m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation des fonctions usuelles :

Fonctions définies par des séries

Théorème de dérivation des séries entières :

La fonction $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ de rayon de convergence R est holomorphe sur le disque ouvert $d(O, R)$. Sa dérivée est la somme de la série dérivée terme à terme. Ainsi

$$\begin{aligned}(e^z)' &= e^z \\ (chz)' &= shz \\ (\cos z)' &= -\sin z \\ &\text{etc } \ldots\end{aligned}$$

On dérive par rapport à z comme on dérive dans R par rapport à x

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation des fonctions multiformes :

- **Dérivée de** $\log_k z$

$$Z = \log_k(z) = \ln \rho + i\theta + 2ik\pi$$

définie de $\mathbb{C} \setminus Ox^+$ dans B_k

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation des fonctions multiformes :

- **Dérivée de** $\log_k z$

$$Z = \log_k(z) = \ln\rho + i\theta + 2ik\pi$$

définie de $\mathbb{C} \setminus Ox^+$ dans B_k

On rappelle que $\exp(\log_k(z)) = z$

dérivation par la formule de la fonction réciproque

$$\begin{aligned} z &= f(Z) \Longrightarrow z' = f'(Z) \\ Z &= f^{-1}(z) \Longrightarrow Z' = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} \end{aligned}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation des fonctions multiformes :

- **Dérivée de** $\log_k z$

$$Z = \log_k(z) = \ln\rho + i\theta + 2ik\pi$$

définie de $\mathbb{C} \setminus Ox^+$ dans B_k

On rappelle que $\exp(\log_k(z)) = z$

dérivation par la formule de la fonction réciproque

$$\begin{aligned} z &= f(Z) \Longrightarrow z' = f'(Z) \\ Z &= f^{-1}(z) \Longrightarrow Z' = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} z &= \exp(Z) \Longrightarrow z' = \exp(Z) \\ Z &= \log_k(z) \Longrightarrow Z' = \frac{1}{\exp(\log_k(z))} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation des fonctions multiformes :

- **Dérivée de $z_{(k)}^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{C}$**

$$z_{(k)}^{\alpha} = \exp\left(\alpha \log_k (z)\right)$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation des fonctions multiformes :

- **Dérivée de** $z_{(k)}^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{C}$

$$z_{(k)}^{\alpha} = \exp\left(\alpha \log_k(z)\right)$$

On obtient par dérivée des fonctions composées :

$$\left[z_{(k)}^{\alpha}\right]' = \left[\alpha \left[\log_k(z)\right]\right]' \exp\left[\alpha \log_k(z)\right]$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.3 Fonctions holomorphes

Dérivation des fonctions multiformes :

- **Dérivée de** $z_{(k)}^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{C}$

$$z_{(k)}^{\alpha} = \exp\left(\alpha \log_k(z)\right)$$

On obtient par dérivée des fonctions composées :

$$\left[z_{(k)}^{\alpha}\right]' = \left[\alpha \left[\log_k(z)\right]\right]' \exp\left[\alpha \log_k(z)\right]$$

Donc :

$$\left[z_{(k)}^{\alpha}\right]' = \frac{\alpha}{z} z_{(k)}^{\alpha}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Généralités

Un **chemin** de $\mathbb{C}$ est une application continue $\gamma \ : [a, b] \to \mathbb{C}$

$[a, b]$ étant un intervalle de $\mathbb{R}$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Généralités

Un **chemin** de $\mathbb{C}$ est une application continue $\gamma \ : [a, b] \to \mathbb{C}$

$[a, b]$ étant un intervalle de $\mathbb{R}$

- Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ s'appelle un **lacet**

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Généralités

Un **chemin** de $\mathbb{C}$ est une application continue $\gamma \; : [a, b] \to \mathbb{C}$

$[a, b]$ étant un intervalle de $\mathbb{R}$

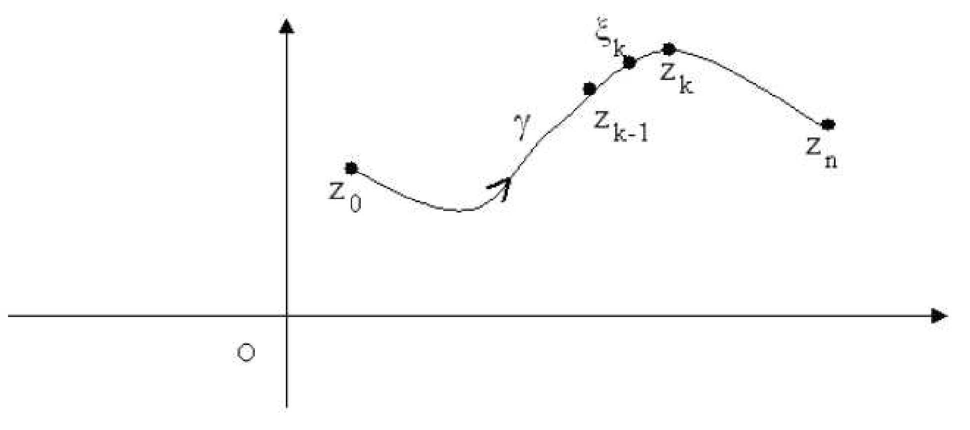
- Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ s'appelle un **lacet**
- γ est C^1 par morceaux si $\gamma'(t)$ existe et est continue sur les intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $[t_{j-1}, t_j]$ avec $t_0 = a < t_1 < ... < t_n = b$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Intégrales curvilignes complexes

Soit $f(z)$ définie sur un chemin C^1 par morceaux γ

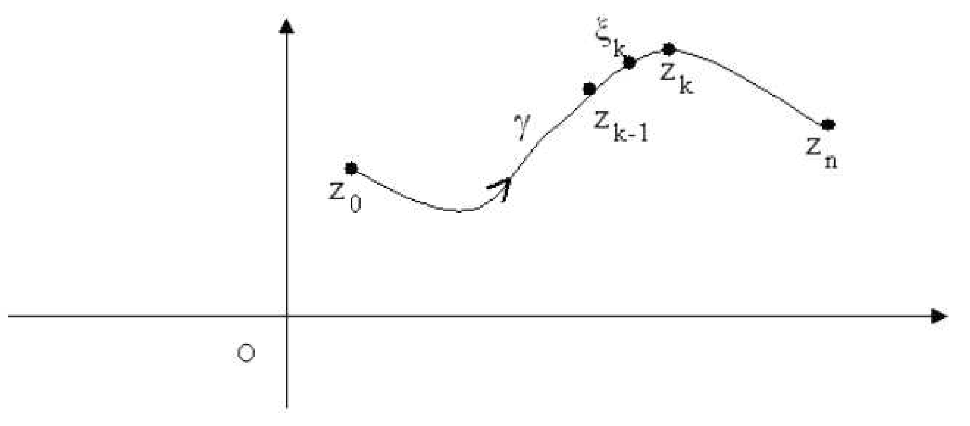


Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Intégrales curvilignes complexes

Soit $f(z)$ définie sur un chemin C^1 par morceaux γ



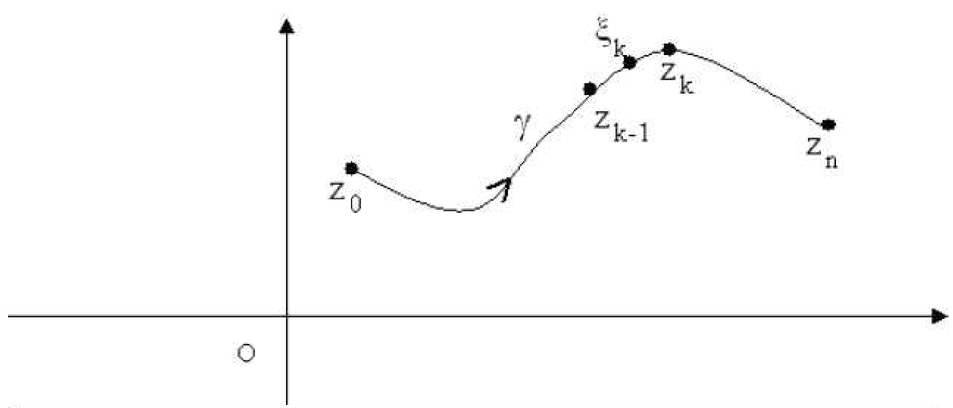
Soit la subdivision $\overset{n}{\underset{k=1}{\cup}} \widehat{z_{k-1}z_k}$ de ce chemin avec $\xi_k \in \widehat{z_{k-1}z_k}$,
$z_k = \gamma(t_k)$, $z_0 = \gamma\left(a\right)$ et $z_n = \gamma\left(b\right)$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Intégrales curvilignes complexes

Soit $f(z)$ définie sur un chemin C^1 par morceaux γ



$$\boxed{\begin{array}{c}\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \\ \text{avec } \max_k |z_k - z_{k-1}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{array}}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Intégrales curvilignes complexes

Avec les notations suivantes

$$\begin{aligned} z_k &= x_k + iy_k \\ z_k - z_{k-1} &= \Delta x_k + i\Delta y_k \\ \xi_k &= a_k + ib_k \\ f(\xi_k) &= P(a_k, b_k) + iQ(a_k, b_k) \end{aligned}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Intégrales curvilignes complexes

Avec les notations suivantes

$$\begin{aligned} z_k &= x_k + iy_k \\ z_k - z_{k-1} &= \Delta x_k + i\Delta y_k \\ \xi_k &= a_k + ib_k \\ f(\xi_k) &= P(a_k, b_k) + iQ(a_k, b_k) \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz = &\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(a_k, b_k)\Delta x_k - Q(a_k, b_k)\Delta y_k \\ &+ i \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} Q(a_k, b_k)\Delta x_k + P(a_k, b_k)\Delta y_k \end{aligned}$$

avec $\max_k |\Delta x_k| \to 0$ et $\max_k |\Delta y_k| \to 0$. D'où

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (Pdx - Qdy) + i\int_\gamma (Qdx + Pdy)$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Intégrales curvilignes complexes

Avec les notations suivantes

$$\begin{aligned} z_k &= x_k + iy_k \\ z_k - z_{k-1} &= \Delta x_k + i\Delta y_k \\ \xi_k &= a_k + ib_k \\ f(\xi_k) &= P(a_k, b_k) + iQ(a_k, b_k) \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(a_k, b_k)\Delta x_k - Q(a_k, b_k)\Delta y_k \\ +i \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} Q(a_k, b_k)\Delta x_k + P(a_k, b_k)\Delta y_k \end{aligned}$$

avec $\max_k |\Delta x_k| \to 0$ et $\max_k |\Delta y_k| \to 0$. D'où

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (Pdx - Qdy) + i\int_\gamma (Qdx + Pdy)}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Intégrales curvilignes complexes

Conditions suffisantes d'existence

$$\boxed{\begin{array}{c} P \text{ et } Q \text{ continues sur } \gamma \\ \text{ou } f \text{ continue sur } \gamma \end{array}}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Intégrales curvilignes complexes

Conditions suffisantes d'existence

$$\boxed{\begin{array}{c} P \text{ et } Q \text{ continues sur } \gamma \\ \text{ou } f \text{ continue sur } \gamma \end{array}}$$

Calcul pratique : γ paramétré

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Intégrales curvilignes complexes

Conditions suffisantes d'existence

$$\boxed{\begin{array}{c} P \text{ et } Q \text{ continues sur } \gamma \\ \text{ou } f \text{ continue sur } \gamma \end{array}}$$

Calcul pratique : γ paramétré

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt}$$

Chemins usuels

- Segment de droite parallèle à l'axe des abscisses,
  $z = x + iy_0$, $x \in [x_1, x_2]$
- Segment de droite parallèle à l'axe des ordonnées,
  $z = x_0 + iy$, $y \in [y_1, y_2]$
- Arc de cercle de rayon R_0
  $z = R_0 e^{i\theta}$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$
- Segment de droite passant par l'origine
  $z = \rho e^{i\theta_0}$, $\rho \in [\rho_1, \rho_2]$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Propriétés élémentaires de l'intégrale

a) Linéarité

$$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Propriétés élémentaires de l'intégrale

a) Linéarité

$$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz$$

b) Sens de parcours du chemin γ

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_{\gamma^+} f(z)dz$$

$\gamma^- = \gamma^+$ parcouru en sens inverse

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Propriétés élémentaires de l'intégrale

a) Linéarité

$$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz$$

b) Sens de parcours du chemin γ

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_{\gamma^+} f(z)dz$$

$\gamma^- = \gamma^+$ parcouru en sens inverse

c) Intégrale d'une constante $f(z) = K$

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1}) = K(z_n - z_0) = K(b - a)$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

1er Lemme de Jordan :

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

1er Lemme de Jordan :

Hypothèses

$C_r(a, r)$ arc de cercle de centre a et de rayon r

$\lim_{r\to 0(\text{ resp. } \infty)} \sup_{C_r} |(z-a)f(z)| = 0$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

1er Lemme de Jordan :

Hypothèses

$C_r(a, r)$ arc de cercle de centre a et de rayon r

$\lim_{r \to 0(\text{ resp. } \infty)} \sup_{C_r} \ |(z-a) f(z)| = 0$

Conclusion

$$\boxed{\lim_{r \to 0(\text{ resp. } \infty)} \int_{C_r} f(z) dz = 0}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

1er Lemme de Jordan :

Preuve

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_r} f(z)dz\right| &= \left|\int_\alpha^\beta f(a+re^{i\theta})rie^{i\theta}\,d\theta\right| \\ &\leqslant \int_\alpha^\beta \left|rf(a+re^{i\theta})\right| d\theta \\ &\leqslant (\beta-\alpha)\sup_{C_r}\ \left|(z-a)\,f(z)\right|\end{aligned}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

2ème Lemme de Jordan :

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

2$^{\text{ème}}$ Lemme de Jordan :

Hypothèse

$\lim_{\infty} \sup_{C_r} |f(z)| = 0$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

2ème Lemme de Jordan :

Hypothèse

$\lim_{\infty} \sup_{C_r} |f(z)| = 0$

Conclusions

$\lim_{\infty} \int_{C_r} e^{imz} f(z)dz = 0$	pour $m > 0$ et $C_r = C_r^+$
$\lim_{\infty} \int_{C_r} e^{imz} f(z)dz = 0$	pour $m < 0$ et $C_r = C_r^-$
$\lim_{\infty} \int_{C_r} e^{mz} f(z)dz = 0$	pour $m < 0$ et $C_r = C_r^d$
$\lim_{\infty} \int_{C_r} e^{mz} f(z)dz = 0$	pour $m > 0$ et $C_r = C_r^g$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

2ème Lemme de Jordan :

Preuve :

$$\begin{aligned} |I_r| &= \left| \int_{C_r} e^{imz} f(z) dz \right| = \left| \int_0^{\pi} e^{imre^{i\theta}} f(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq 2r \sup_{C_r} |f(z)| \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mr\sin\theta} d\theta \\ &\leq \sup_{C_r} |f(z)| \frac{\pi}{m}(1 - e^{-mr}) \ (\text{car } \sin\theta \geqslant \frac{2\theta}{\pi}) \end{aligned}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Intégration des fonctions holomorphes

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Intégration des fonctions holomorphes

Hypothèses

f holomorphe sur Ω ouvert non vide de $\mathbb{C}$

Soit $D \subset \Omega$ un domaine simplement connexe de contour C

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Intégration des fonctions holomorphes

Hypothèses

f holomorphe sur Ω ouvert non vide de $\mathbb{C}$

Soit $D \subset \Omega$ un domaine simplement connexe de contour C

Conclusion

$$\boxed{\int_C f(z)dz = 0}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Intégration des fonctions holomorphes

Preuve : utiliser la formule de Green Riemann

$$\int_{C^+} Adx + Bdy = \int\int_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dxdy$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Application

Soit f holomorphe sur un domaine simplement connexe D

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Application

Soit f holomorphe sur un domaine simplement connexe D

a) Définition de $\int_a^b f(z)dz$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Application

Soit f holomorphe sur un domaine simplement connexe D

a) Définition de $\int_a^b f(z)dz$

Soient deux points a et b de D
Soient γ_1, γ_2 deux chemins inclus dans D d'origine a et d'extrémité b. Alors

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Application

Soit f holomorphe sur un domaine simplement connexe D

a) Définition de $\int_a^b f(z)dz$

Soient deux points a et b de D
Soient γ_1, γ_2 deux chemins inclus dans D d'origine a et d'extrémité b. Alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_a^b f(z)dz$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Application

Soit f holomorphe sur un domaine simplement connexe D

b) Définition de $F_{z_0}(u) = \int_{z_0}^{u} f(z)dz,\ u \in \mathbb{C}$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Application

Soit f holomorphe sur un domaine simplement connexe D

b) Définition de $F_{z_0}(u) = \int_{z_0}^{u} f(z)dz,\ u \in \mathbb{C}$

$F_{z_0}(u)$ est indépendante du chemin joignant z_0 et u
inclu dans D

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.4 Intégration et théorème de Cauchy

Application

Soit f holomorphe sur un domaine simplement connexe D

b) Définition de $F_{z_0}(u) = \int_{z_0}^{u} f(z)dz, \; u \in \mathbb{C}$

$F_{z_0}(u)$ est indépendante du chemin joignant z_0 et u inclu dans D

$F_{z_0}(u)$ est une primitive de $f(z)$ telle que $F'_{z_0}(u) = f(u)$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

=> outil puissant pour évaluer des intégrales curvilignes de fonctions holomorphes sur des courbes fermées

=> peut aussi bien être utilisé pour calculer des intégrales de fonctions réelles ainsi que la somme de certaines séries

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Théorème pour un domaine borné *D*

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Théorème pour un domaine borné *D*

Hypothèses

f holomorphe sur $\Omega \backslash \bigcup_j z_j$, Ω ouvert non vide de $\mathbb{C}$

z_j points singuliers isolés de f

$D \subset \Omega$ domaine simplement connexe de contour ∂D inclus dans Ω

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Théorème pour un domaine borné *D*

Hypothèses

f holomorphe sur $\Omega \backslash \bigcup_j z_j$, Ω ouvert non vide de $\mathbb{C}$

z_j points singuliers isolés de f

$D \subset \Omega$ domaine simplement connexe de contour ∂D inclus dans Ω

Conclusion

$$\boxed{\int_{\partial D^+} f(z)dz = 2i\pi \sum_{z_j \in D} \mathrm{res} f(z_j)}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Théorème pour un domaine borné *D*

Hypothèses

f holomorphe sur $\Omega \backslash \bigcup_j z_j$, Ω ouvert non vide de $\mathbb{C}$

z_j points singuliers isolés de f

$D \subset \Omega$ domaine simplement connexe de contour ∂D inclus dans Ω

Conclusion

$$\boxed{\int_{\partial D^+} f(z)dz = 2i\pi \sum_{z_j \in D} \operatorname{res} f(z_j)}$$

avec (définition de $\operatorname{res} f(z_j)$) :

$$\boxed{\operatorname{res} f(z_j) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+(z_j,r)} f(z)dz}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Point singulier isolé (psi)

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Point singulier isolé (psi)

z_j est un psi de $f(z)$ si et seulement si $\exists r > 0$ tel que f est holomorphe sur $d(z_j, r) \backslash \{z_j\}$, $d(z_j, r)$ désignant le disque de centre z_i et de rayon r

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Calcul du résidu à l'aide du développement de Laurent

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Calcul du résidu à l'aide du développement de Laurent

Si z_j est un psi, on admet que f possède un développement dit développement de Laurent dans $d(z_j, r)\backslash\{z_j\}$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_j)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_j)^n$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Calcul du résidu à l'aide du développement de Laurent

Si z_j est un psi, on admet que f possède un développement dit développement de Laurent dans $d(z_j, r)\backslash\{z_j\}$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_j)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_j)^n$$

On en déduit alors :

$$\int_{C^+(z_j,r)} f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{C^+} \frac{b_n}{(z-z_j)^n} dz + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C^+} a_n (z-z_j)^n dz$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Calcul du résidu à l'aide du développement de Laurent

On pose $z - z_j = re^{i\theta}$ et on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{b_n i d\theta}{r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}} + i \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_n r^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Calcul du résidu à l'aide du développement de Laurent

On pose $z - z_j = re^{i\theta}$ et on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{b_n i d\theta}{r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}} + i \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_n r^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta$$

Toutes les intégrales sont nulles sauf :

$$\int_0^{2\pi} \frac{b_n i d\theta}{r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}} \quad \text{avec} \quad n = 1$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Calcul du résidu à l'aide du développement de Laurent

Donc :

$$\int_{C^+(z_j,r)} f(z)dz = \int_0^{2\pi} b_1 i d\theta = 2i\pi b_1$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Calcul du résidu à l'aide du développement de Laurent

Donc :

$$\int_{C^+(z_j,r)} f(z)dz = \int_0^{2\pi} b_1 i d\theta = 2i\pi b_1$$

Conclusion : $\mathrm{res} f(z_j)$ **est le coefficient du terme en** $\frac{1}{z-z_j}$ **de la partie principale du dévt de Laurent de** f

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Calcul des résidus pour un pôle d'ordre p

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Calcul des résidus pour un pôle d'ordre p

On effectue le développement de Taylor de $\varphi(z) = (z - z_j)^p f(z)$ qui est holomorphe sur $V(z_j)$

$$\varphi(z) = \varphi(z_j) + ... + \frac{(z - z_j)^{p-1}}{(p-1)!} \varphi_{(z_j)}^{(p-1)} + ...$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Calcul des résidus pour un pôle d'ordre p

On effectue le développement de Taylor de $\varphi(z) = (z - z_j)^p f(z)$ qui est holomorphe sur $V(z_j)$

$$\varphi(z) = \varphi(z_j) + \ldots + \frac{(z - z_j)^{p-1}}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}_{(z_j)} + \ldots$$

d'où le développement de Laurent de f :

$$f(z) = \frac{\varphi(z_j)}{(z - z_j)^p} + \ldots + \frac{\varphi^{(p-1)}_{(z_j)}}{(p-1)!(z - z_j)} + \ldots$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Calcul des résidus pour un pôle d'ordre p

On effectue le développement de Taylor de $\varphi(z) = (z - z_j)^p f(z)$ qui est holomorphe sur $V(z_j)$

$$\varphi(z) = \varphi(z_j) + \ldots + \frac{(z - z_j)^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}_{(z_j)} + \ldots$$

d'où le développement de Laurent de f :

$$f(z) = \frac{\varphi(z_j)}{(z - z_j)^p} + \ldots + \frac{\varphi^{(p-1)}_{(z_j)}}{(p-1)!(z - z_j)} + \ldots$$

donc

$$\boxed{\mathrm{res} f(z_j) = \frac{1}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}_{(z_j)} = \frac{1}{(p-1)!}\;\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left[(z - z_j)^p f(z)\right]\Big|_{z=z_j}}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Calcul des résidus pour un pôle d'ordre p

En pratique :

- pour $p > 2$, on effectue le développement de Laurent,
- pour $p = 2$, on peut utiliser $\mathrm{res} f(z_j) = \frac{d}{dz}(z - z_j)^2 f(z)\big|_{z=z_j}$,
- pour $p = 1$, on a $\mathrm{res} f(z_j) = \lim\limits_{z \longrightarrow z_i} (z - z_j) f(z)$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Cas particulier intéressant : z_j pôle d'ordre 1, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z_j) \neq 0$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Cas particulier intéressant : z_j pôle d'ordre 1, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z_j) \neq 0$

On développe $Q(z)$:

$$Q(z) = 0 + (z - z_j)Q'(z_j) + \frac{(z - z_j)^2}{2!}Q''(z_j) + \ldots$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Cas particulier intéressant : z_j pôle d'ordre 1, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z_j) \neq 0$

On développe $Q(z)$:

$$Q(z) = 0 + (z - z_j)Q'(z_j) + \frac{(z - z_j)^2}{2!}Q''(z_j) + \dots$$

donc

$$\boxed{\lim_{z \to z_j} (z - z_j)f(z) = \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)}}$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Cas particulier intéressant : z_j pôle d'ordre 1, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z_j) \neq 0$

On développe $Q(z)$:

$$Q(z) = 0 + (z - z_j)Q'(z_j) + \frac{(z - z_j)^2}{2!}Q''(z_j) + \ldots$$

donc

$$\boxed{\lim_{z \to z_j}(z - z_j)f(z) = \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)}}$$

Cette formule est intéressante pour certains calculs de résidus comme celui de $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ en $z = 0$. En effet :

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Cas particulier intéressant : z_j pôle d'ordre 1, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z_j) \neq 0$

On développe $Q(z)$:

$$Q(z) = 0 + (z - z_j)Q'(z_j) + \frac{(z - z_j)^2}{2!}Q''(z_j) + \ldots$$

donc

$$\boxed{\lim_{z \longrightarrow z_j} (z - z_j)f(z) = \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)}}$$

Cette formule est intéressante pour certains calculs de résidus comme celui de $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ en $z = 0$. En effet :

$$\mathrm{res} f\,(0) = \frac{P(0)}{Q'(0)} = \frac{1}{\cos 0} = 1$$

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Application au calcul intégral

Intégrales du type I : $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Le plus souvent, on prend $f(z)$ et le contour est constitué d'une partie rectiligne qui donne I et de parties circulaires qui ferment le contour

Partie 3 – Fonctions de la variable complexe

3.5 Théorème des résidus

Application au calcul intégral

Intégrales trigonométriques

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$$

où R est une fraction rationnelle. On pose $z = e^{i\theta}$ et on exprime $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de z

On se ramène alors au calcul d'une intégrale sur le cercle unité