Série de Travaux Dirigés - Corrigé

L3 électronique

Septembre 2024

1 Questions de cours

Soit la famille $\mathcal{A} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m\}$ une famille de m vecteurs dans un espace vectoriel U.

- **Définition d'une famille génératrice :** La famille $\mathcal{A}$ est dite génératrice de U si tout vecteur de U peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{A}$.

  Définition d'une famille libre : La famille $\mathcal{A}$ est libre si aucune combinaison linéaire non triviale des vecteurs de $\mathcal{A}$ n'est égale au vecteur nul.

- Si $\mathcal{A}$ est une base de U, alors U est de dimension finie m, c'est-à-dire $\dim(U) = m$.

- **Sous-espace engendré par $\mathcal{A}$:** Le sous-espace engendré par $\mathcal{A}$, noté $\mathrm{Vect}(\mathcal{A})$, est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{A}$.

Soit l'application linéaire définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} f : & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ & X \mapsto AX \end{array} \right. \tag{1}$$

- La matrice A est de dimension $n \times n$.

- **Noyau de f :** Le noyau de f, noté $\ker(f)$, est l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{R}^n$ tels que $AX = 0$. C'est l'ensemble des solutions de l'équation homogène $AX = 0$.

- Si $\det(A) = 0$, alors le noyau de f n'est pas réduit au vecteur nul, ce qui signifie que la dimension du noyau est strictement positive.

- **Théorème du rang :** Le théorème du rang stipule que pour une application linéaire f, la dimension de l'image de f (son rang) et la dimension de son noyau vérifient la relation :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = n$$

- La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
- **Vecteur propre et valeur propre :** Un vecteur propre de A est un vecteur non nul $\vec{v}$ tel que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ pour un certain scalaire λ. Ce scalaire λ est une valeur propre de A.

2 Application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z) = (-17x + 3y + 9z, -54x + 7y + 27z, -12x + 3y + 7z)$$

- La matrice de l'application linéaire f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M_f = \begin{pmatrix} -17 & 3 & 9 \\ -54 & 7 & 27 \\ -12 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

- La trace de M_f est la somme des éléments diagonaux :

$$\text{trace}(M_f) = -17 + 7 + 7 = -3$$

- Le déterminant de M_f est donné par :

$$\det(M_f) = 4$$

- Pour la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 2), (0, -3, 1), (1, 2, 1)\}$, la matrice de f dans cette base se calcule à l'aide des coordonnées des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}$, soit:

$$\begin{aligned} f(\vec{b}_1) &= f(1, 0, 2) = (1, 0, 2) = \vec{b}_1 \\ f(\vec{b}_2) &= f(0, -3, 1) = (0, 6, -2) = 2\vec{b}_2 \\ f(\vec{b}_3) &= f(1, 2, 1) = (-2, -13, 1) = 3\vec{b}_2 - 2\vec{b}_3 \end{aligned} \tag{2}$$

  donc,

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

- La matrice de passage de la base B vers la base canonique est donnée par:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- L'inverse de P se calcule à l'aide du pivot de Gauss et on obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

- $P^{-1}MP$ représente la matrice de f dans la base B qu'on a calculé précédemment $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

3 Diagonalisation des matrices

3.1 Exercice 3.1

On considère la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 7 & -2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Le polynôme caractéristique de A est donné par $\det(A - \lambda I_3)$, soit :

  $$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 & -2 \\ -4 & 7-\lambda & -2 \\ -4 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

  En développant ce déterminant, on obtient :

  $$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9$$

- Les valeurs de λ pour lesquelles $\det(A - \lambda I_3) = 0$ sont les racines de ce polynôme : $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$.
- Le rang de la matrice $A - 3I$ est 1.
- On a après calcul immédiat:

  $$A\vec{u}_1 = \vec{u}_1, A\vec{u}_2 = 3\vec{u}_2, A\vec{u}_3 = 3\vec{u}_3 \tag{4}$$

  Les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ sont donc des vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives 1, 3 et 3.
- La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la base canonique est :

  $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- L'inverse de P est :

  $$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- Les puissances de la matrice A sont données par : Posons $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

  On a $P^{-1}AP = \Delta$ donc $A = P\Delta P^{-1}$.

$$A^k = (P\Delta P^{-1})^k = \underbrace{P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1}\dots P\Delta P^{-1}}_{k fois} = P\Delta^k P^{-1}.$$

  De plus : $\Delta^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}$ Un calcul du produit matriciel $P\Delta^k P^{-1}$ nous donne: $A^k = (P\Delta P^{-1})^k = \begin{pmatrix} 2-3^k & -2+2.3^k & 1-3^k \\ 2-2.3^k & -2+3.3^k & 1-3^k \\ 2-2.3^k & -2+2.3^k & 1 \end{pmatrix}$