Outils mathématiques pour l'électronique

Sara El Bouch

sara.elbouch@univ-cotedazur.fr
Université Côte d'Azur, EUR DS4H, J-.L Lagrange

Septembre 2024

Contenu du cours

- Partie I: Algèbre linéaire
- Partie II: Fonctions de la variable complexe

Évaluation

- Contrôle continu (10%)
- Examen Partie 1 (01/10/24)
- Examen Partie 2 (14/11/24)

Algèbre Linéaire

- Espaces vectoriels
  - Sous-espaces vectoriels
  - Combinaison linéaire et générateurs
  - Dépendance linéaire (Famille libre)
  - Bases et dimension
- Applications linéaires et Matrices
  - Définitions, noyau, Image
  - Théorème du rang
  - Matrices, traces, déterminant
  - Diagonalisation

Introduction: Vecteurs

Un vecteur est caractérisé par une direction, un sens et une longeur.

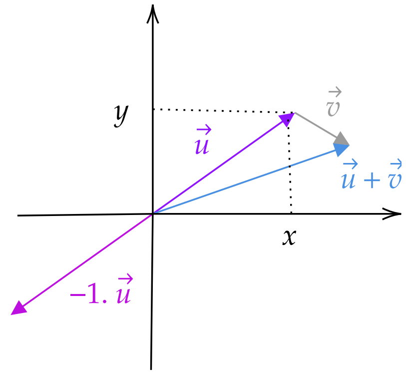


Figure 1: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$

Convention et notation

Dans ce cours, on choisira de représenter un vecteur en partant de l'origine $O = (0,0)$. vecteur du plan $\vec{u} = \boldsymbol{u} = (x, y)^\top$ point du plan.

Espace vectoriel

Definition

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{V} = (V, +, .)$ est formé d'un ensemble (de vecteurs) V et de deux applications, appelées *lois*: Loi d'addition $V \times V \to V$ et de multiplication $\mathbb{R} \times V \to V$ qui vérifient:

Axiomes de la somme

1. Associativité $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
2. Commutativité $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. Neutre $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. Opposé $\forall \vec{u}, \exists vt.q \vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.

Axiomes de la loi multiplicative .

1. Associativité $\lambda(\mu.\vec{u}) = (\lambda \times \mu).\vec{u}$
2. Somme des vecteur $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$.
3. Somme des scalaires $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$.

Exemples

- L'ensemble $(\mathbb{R}^n, +, .)$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble des complexes $(\mathbb{C}, +, .)$ forme un espace vectoriel.
- L'ensemble des matrices $(M_{n,m}, +, .)$ muni de la somme coordonnée par coordonée et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel.

Exercice: Vérifier que ces ensembles vérifient bien les axiomes définissant les espaces vectoriels.

Sous-espace vectoriels

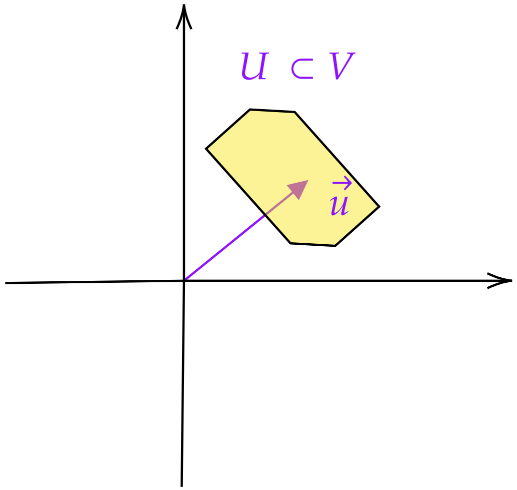


Figure 2: Est-ce que U est un sous-espace vectoriel de V ?

Théorèmes

Theorem
Un sous-ensemble V d'un ensemble vectoriel $(V, +, .)$ *est un sous-espace vectoriel ssi:*

1. $\vec{0} \in U$,
2. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in U, \vec{u} + \vec{v} \in U$,
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in U,\ \lambda . \vec{u} \in U$.

Sous-espace vectoriels

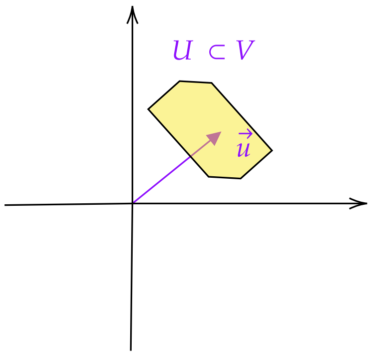
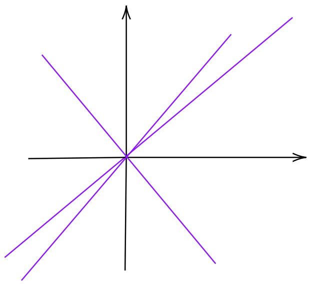
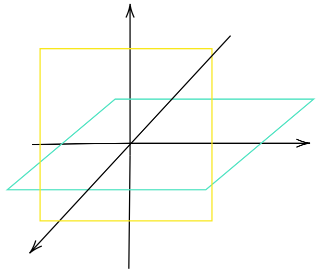


Figure 3: Est-ce que U est un sous-espace vectoriel de V ?

Sous-espace vectoriels





• Toutes les droites vectorielles passant par l'origine ainsi que tous les plans vectoriels passant par l'origine sont des sous-espaces vectoriels.

Espace engendré

Si $\mathcal{A}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$, quel est le plus petit espace contenant A qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$?

Definition

Soit $\mathcal{V} = (V, +, .)$ un espace vectoriel et soit un ensemble $A \subset V$. On appelle (sous-)espace vectoriel engendré par A, l'ensemble des **combinaisons linéaires** d'éléments de A, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de la forme:

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n \quad (1)$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathcal{A}$.

On le note: $\text{Vect}(\mathcal{A}) =$
$\{\lambda_1 \vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n | \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathcal{A}\}$
$\text{Vect}(\mathcal{A})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$.

Exemples

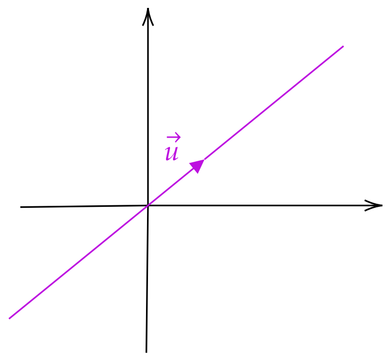


Figure 4: L'espace engendré par un vecteur est une droite vectorielle

Bases et dimension

Definition (Famille génératrice)

Si Vect($\mathcal{A}$) = $\mathcal{V}$. On dit que la famille de vecteurs de $\mathcal{A}$ engendre $\mathcal{V}$, ou est **une famille génératrice de** $\mathcal{A}$.

(Une famille génératrice est comme un ensemble de lettres avec lesquels on peut écrire tous les mots de V).

Questions

1. La famille de vecteurs $\{(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\}$ engendre l'espace vectoriel .. ?
2. $\{1, i\}$ engendre l'espace vectoriel des .. ?
3. $1, X, X^2, \ldots, X^d$ engendre l'espace vectoriel des ..?

Espace vectoriel fini

Si la la famille génératrice contient un nombre **fini** de vecteurs, il est de type **fini**.

Famille libre

Est-ce que $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i$ est **unique**?

Definition (Famille libre)

Une famille $\mathcal{A}$ de vecteurs est dite libre si:
$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$

Exemple

La famille de vecteurs $\vec{u} = (1, 0), \vec{v} = (1, 1)$ et $\vec{w} = (0, -2)$ est-elle libre ?

Base et dimension

Definition (Base)

Une famille de vecteurs notée $\mathcal{B}$, d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$ est une base si elle est libre et génératrice des vecteurs de $\mathcal{V}$. Le nombre d'éléments de cette base est la **dimension** de l'espace vectoriel.

Theorem (Théorème de la base incomplète)

Toute famille libre $\mathcal{A}$ d'un espace vectoriel peut s'étendre en une base $\mathcal{B}$.

Theorem (Théorème de la base extraite)

On peut extraire une base de toute famille génératrice $\mathcal{A}$ d'un espace vectoriel

Remarque

à chaque vecteur on peut associer des coordonnées dans $\mathbb{R}^n$.
Comment est-ce qu'on montre qu'une famille de vecteur dans R^n est libre ? génératrice ?

Et $\mathbb{R}^n$

Soit $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\}$ une famille de m vecteurs de dimension n $\vec{a}_i = (a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, a_{n,i}) \in \mathbb{R}^n$.

$$M_A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \equiv M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Exemple (au tableau)

Proposition

Les vecteurs colonnes de la matrice échelonnée équivalente à M_A forment une base de Vect($\mathcal{A}$).

Applications linéaires et Matrices

Definition (Application linéaire)

Soient $(U, +_U, ._U)$ et $(V, +_V, ._V)$ deux espaces vectoriels. Une application $f : U \to V$ est dite linéaire si:

$$f(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = f(\vec{u}_1) + f(\vec{u}_2) \quad (3)$$
$$f(\lambda.\vec{u}) = \lambda.f(\vec{u}) \quad (4)$$
$$f(\lambda_1.\vec{u}_1 + \lambda_2.\vec{u}_2) = \lambda_1.f(\vec{u}_1) + \lambda_2.f(\vec{u}_2) \quad (5)$$

Exemples

Toute matrice $A \in M_{n,m}$ donne naissance à une application:

$$f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad (6)$$
$$X \to AX \quad (7)$$

Exercice Mq f_A est linéaire.

Noyau et Image

Definition

• Le noyau d'une application f est la préimage du vecteur nul par f.

$$ker(f) = \{\vec{u} \in U | \vec{u} = \vec{0}\}$$

• L'image d'une application f est l'ensemble défini par f.

$$Im(f) = \{\vec{u} \in V : \exists \vec{u} \in U, f(\vec{u}) = \vec{v}\}$$

Quel est le Kerf_A ? Interprétez ce résultat ?

Théorème du rang (admis)

Soit U un espace vectoriel de type fini de dimension n, et V un espace vectoriel quelconque et f une application linéaire de $U \to V$.

- Les espaces ker(f) et Im(f) sont de dimensions finies et vérifient :
$$n = dim(ker(f)) + dim(Im(f))$$

Matrices

Rappels

- Produit matriciel $A \in M_{n,p}$, $B \in M_{p,m}$:

$$c_{i,k} = A \times B = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k} \in ? \tag{8}$$

- $(AB)C = A(BC) = ABC$
- $A(B + C) = AB + AC$
- Si $A \in M_{n,n}$, est inversible ssi $AB = BA = I_n$. B est unique et on la note A^{-1}. De plus, $Tr(A) = \sum_{i=1^n} a_{i,i}$.

Matrice d'une application linéaire

Soit f $\in L(U, V)$, la matrice associée à f dans les bases A, B est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées de $f(u_i)$ dans B: $f(\vec{u_i}) = a_{1,i}\vec{v_1} + \ldots a_{n,i}\vec{v_n}$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$