Outils mathématiques pour l'électronique

Sara El Bouch

sara.elbouch@univ-cotedazur.fr
Université Côte d'Azur, EUR DS4H, J-.L Lagrange

Septembre 2024

Algèbre Linéaire

- Espaces vectoriels
  - Sous-espaces vectoriels
  - Combinaison linéaire et générateurs
  - Dépendance linéaire (Famille libre)
  - Bases et dimension
- Applications linéaires et Matrices
  - Matrices
  - Définitions, noyau, Image
  - Théorème du rang
  - Traces, Déterminant
  - Diagonalisation/Trigonalisation

Matrices

Definition

Une **matrice** à éléments dans $\mathbb{K}$ est un tableau rectangulaire rempli d'éléments de K.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,1} & \dots & a_{2,j} & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & a_{i,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & a_{n,m} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{K}). \quad (1)$$

- **Matrice carrée**: si $n = m$
- **Matrice diagonale**: Si $n = m$ et $a_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 3.

Matrices particulières

- **Matrice triangulaire inférieure**: Si $n = m$ et $a_{i,j} = 0$ pour tout $i < j$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure d'ordre 3.
- **Matrice colonne** (très utile pour représenter les vecteurs d'un E.V), $\vec{v} = 1 \times \vec{e_1} + 5 \times \vec{e_2} + 0\vec{e_3} + 2\vec{e_4}$ $coord\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
- **Matrice transposée** $A^\top$ est la matrice obtenue en interchangeant les lignes et les colonnes de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}, A^\top = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Opérations sur les Matrices

- **Somme** de deux matrices (**de la même taille**):

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 12 & 2 & -2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

- Multiplication par un scalaire λ,

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 4\lambda & 6\lambda \\ 5\lambda & 2\lambda & 3\lambda \end{pmatrix} \tag{4}$$

- **Produit matriciel** $A \in M_{n,p}(K)$, $B \in M_{p,m}(K)$; $C = A \times B$ tq:

$$c_{i,k} = A \times B = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k} \in M_{n,m}(K). \tag{5}$$

Propriétés

- **Associative** et **commutative**: (A+B)+C = A + (B+C) = A + B + C
- **Distributive**: $A(B + C) = AB + AC$
- La multiplication est **Associative**: (AB)C = A(BC). Est-elle commutative ? AB = BA ?

Matrice particulières

Definition

Une matrice carrée égale à sa transposée $A^\top = A$ est dite symétrique.

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ **est symmétrique.**

Definition (Matrice nulle et matrice identité)

$$0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice inversible

$A \in M_n$, est **inversible** si il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$. Si B existe, elle est unique et on la note A^{-1}.

- $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$
- $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$
- **Trace** d'une matrice **carré** est la somme des éléments de la diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 6 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}, Tr(A) = 11. \tag{6}$$

- Pour toute paire A, C de matrices carrés de même taille, on a $\mathrm{Tr(AC)} = \mathrm{Tr(CA)}$.

Algorithme du pivot de Gauss

Est-ce que la matrice A est inversible ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Exercice

La matrice A est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Si oui, calculez son inverse.

Applications linéaires

Definition (Application linéaire)

Soient $(U, +_U, ._U)$ et $(V, +_V, ._V)$ deux espaces vectoriels. Une application $f : U \to V$ est dite linéaire si:

$$f(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = f(\vec{u}_1) + f(\vec{u}_2) \tag{9}$$

$$f(\lambda.\vec{u}) = \lambda.f(\vec{u}) \tag{10}$$

$$f(\lambda_1.\vec{u}_1 + \lambda_2.\vec{u}_2) = \lambda_1.f(\vec{u}_1) + \lambda_2.f(\vec{u}_2) \tag{11}$$

Remarque: Si f est linéaire, alors $f(\vec{0}_U) = \vec{0}_V$.

Exemples

Toute matrice $A \in M_{n,m}$ donne naissance à une application:

$$f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \tag{12}$$

$$X \to AX \tag{13}$$

Exercice Mq f_A est linéaire.

Propositions

La composée de deux applications linéaire f et g est encore une application linéaire.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, dashed] & V \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

$$g\ o\ f(u) \ = \ g(f(u))$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_B"] & \mathbb{R}^p \\ X \arrow[r] & AX \arrow[r] & ABX \end{tikzcd}$$

Noyau et Image

Definition

• Le noyau d'une application f est la préimage du vecteur nul par f.

$$ker(f) = \{\vec{u} \in U | f(\vec{u}) = \vec{0}\}$$

• L'image d'une application f est l'ensemble défini par f.

$$Im(f) = \{\vec{v} \in V : \exists \vec{u} \in U, f(\vec{u}) = \vec{v}\}$$

Quel est le Kerf_A ? Im f_A ? Interprétez ce résultat ?

Théorème du rang

Théorème du rang (admis)

Soit U un espace vectoriel de type fini de dimension n, et V un espace vectoriel quelconque et f une application linéaire de $U \to V$.

- Les espaces ker(f) et Im(f) sont de dimensions finies et vérifient :

$$n = dim(ker(f)) + dim(Im(f))$$

Definition

Le rang d'une application linéaire est la dimension de l'image:

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) \tag{14}$$

Matrice d'une application linéaire

Propriété universelle

Soit $B = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ une base de E. Soit $A = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ une famille de F. Il existe une **unique** application linéaire qui envoie la famille de B sur la famille A.

Exemple

Soit

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \tag{15}$$

$$X \to AX \tag{16}$$

$$\left(f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, f_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice Preuve !

Matrice associée à une application linéaire

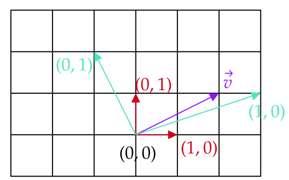
Soit $A = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$ une base de U et $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ une base de V. $f(\vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} \vec{v}_i$.

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "coord_A"'] & V \arrow[d, "coord_B"] \\
\mathbb{R}^m \arrow[r, "f_M"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
\qquad
M_{B,A}(f) = \begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\underbrace{a_{n,1}}_{f(\vec{u}_1)} & \underbrace{a_{n,2}}_{f(\vec{u}_2)} & \cdots & \underbrace{a_{n,m}}_{f(\vec{u}_m)}
\end{pmatrix}
$$

La matrice $M_{B,A}(f)$ est la matrice représentant f relativement aux bases (choisies) de U et V resp. A et B.

Matrice de changement de base

- Dans le langage rouge $\vec{v}$ est le vecteur $(2, 1)$.
- Dans le langage bleu $\vec{v}$ est le vecteur $(\frac{5}{7}, \frac{1}{7})$.



• Existe-t-il un moyen de traduire le langage rouge $\leftrightarrow$ bleu ? Oui ! La matrice de changement de base !

Matrice de changement de base

Dans un même espace vectoriel

Un même espace vectoriel U de dimension m **peut avoir plusieurs bases**. Soit $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$ et $B' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m\}$ deux bases de U.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_m \end{pmatrix} \tag{17}$$

Definition

On appelle *matrice de passage* de la base B' dans la base B la matrice de l'application identité dans les bases B et B' et qu'on note:

$$M_{B,B'}(id), \text{et on a } X' = (M_{B,B'}(id))^{-1}X \tag{18}$$

Exemple

Considérons $\mathbb{R}_3[X]$. Quel est la matrice de passage de la base $B' = \{1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3\}$ à la base canonique $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

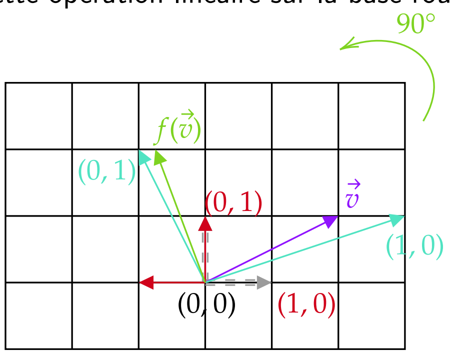
$$M_{B,B'}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Les coordonnées d'un polynôme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ s'expriment dans la base B' comme:

$$(M_{B,B'}(id))^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Matrice de changement de base

- Comment se traduit cette opération linéaire sur la base rouge dans la base bleue ?



$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{u}$$

Matrice de changement de Base

Soit U, V deux espaces vectoriels et f est l'application linéaire de U à V.

$$\underset{A'}{U} \xrightarrow{id} \underset{A}{U} \xrightarrow{f} \underset{B}{V} \xrightarrow{id} \underset{B'}{V}$$

Definition

La matrice représentant l'application linéaire f dans les nouvelles bases A' et B' est donnée par:

$$M_{B',A'}(f) = \left(M_{B,B'}(id)\right)^{-1} M_{B,A}(f) M_{A,A'}(id) \qquad (21)$$

Exemple

$$\begin{cases} f: & \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \to (2y-z, 3x-2y, -2x+2y+z) \end{cases} \quad (22)$$

- Quel est la matrice associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?
- Quel est la matrice représentant f dans la base $\{(1,1,1),(4,3,-2),(2,-3,2)\}$?
- Que pensez-vous de cette nouvelle matrice ?

Rang d'une matrice

Definition

Le rang d'une application linéaire f est la dimension de l'image:

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) \quad (23)$$

Definition

Le rang d'une matrice A est le rang de l'application linéaire f qu'elle représente. C'est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par le colonne de la matrice. Pour une matrice de $A \in M_{n,m}$, on rang$(A) = min(n,m)$.

Le déterminant

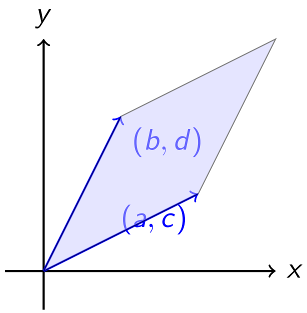
- Pour une matrice 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

  Le déterminant est:

$$\det(A) = ad - bc$$

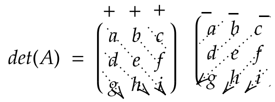
- **Interprétation géométrique:**
  - Valeur absolue de det(A): La surface
  - Le signe du déterminant: l'orientation



Déterminant pour une matrice 3×3

- Pour une matrice 3×3: **Méthode de Sarrus**

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$



- Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le **produit des éléments diagonaux**.

Déterminant

- Pour une matrice carrée d'ordre n, on peut se ramener par **pivot de Gauss** à une matrice triangulaire.
- $det(AB) = det(BA)$
- $det(A^\top) = det(A)$
- $det(A^{-1}) = 1/det(A)$.

Application

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \tag{24}$$

- det(A) = ?
- Quel est le **rang** de A ?
- Montrez que la famille $\{(1,4,6),(2,0,7),(3,5,8)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Diagonalisation

Definition (Matrice diagonalisable)

Une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{25}$$

La **diagonalisation** nous permet de calculer A^n !

$$A^n = P^{-1}\Lambda^n P. \tag{26}$$

Vecteurs/valeurs propres

Definition (Vecteur/valeur propre)

Soit un vecteur $\vec{v}$ non-nul et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ qui vérifie:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \tag{27}$$

Alors $\vec{v}$ est un **vecteur propre** de **valeur propre** λ.

$$\begin{aligned} A\vec{v} = \lambda\vec{v} &\implies A\vec{v} = (\lambda I)\vec{v} && (28)\\ &\implies A\vec{v} - (\lambda I)\vec{v} = \vec{0} && (29)\\ &\implies (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} && (30) \end{aligned}$$

• Quand est-ce que cette équation admet-elle une solution ?

Remarque

On appelle $det(A - \lambda I)$ le **polynôme caractéristique** de A.

Exemple

$$\begin{cases} f: & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) \to (2y - z, 3x - 2y, -2x + 2y + z) \end{cases} \tag{31}$$

- Quel est le polynôme caractéristique de la matrice A associée à f dans la base canonique ?
- En déduire les valeurs propres.
- Donner des vecteurs propres de A.

Matrice trigonalisable

Definition (Matrice diagonalisable)

Une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{32}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

• Donner une matrice P telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.