Outils mathématiques pour l'électronique

Sara El Bouch

sara.elbouch@univ-cotedazur.fr
Université Côte d'Azur, EUR DS4H, J-.L Lagrange

Septembre 2024

Algèbre Linéaire

- Applications linéaires et Matrices
  - Matrices
  - Définitions, noyau, Image
  - Théorème du rang
  - Traces, Déterminant
  - Diagonalisation/Trigonalisation
- Introduction aux systèmes d'équations linéaires.
  - Théorie des systèmes linéaires.
  - Résolution par la méthode de pivot de Gauss.
  - Méthode de Cramér.

Exemples d'utilisation

- Traitement du signal et des images (systèmes linéaires, filtrage).
- Prédiction de valeurs réelles (Météo, finance).
- Système de recommandation (Netflix, Amazon).

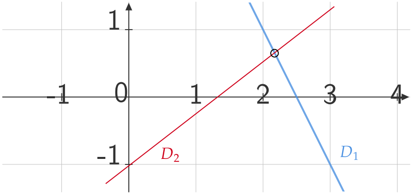
Exemple

L'équation d'un droite D dans le plan s'écrit: $D : a_{11}x + a_{12}y = b$.
Considérons deux droites D_1 et D_2:

$$D_1 : a_{11}x + a_{12}y = b_1 \qquad (1)$$

$$D_2 : a_{21}x + a_{22}y = b_2 \qquad (2)$$

Nous cherchons l'intersection de D_1 et D_2:



Cas 1 : 1 seule solution existe

Figure 1: 1 seule solution existe

Cas 2

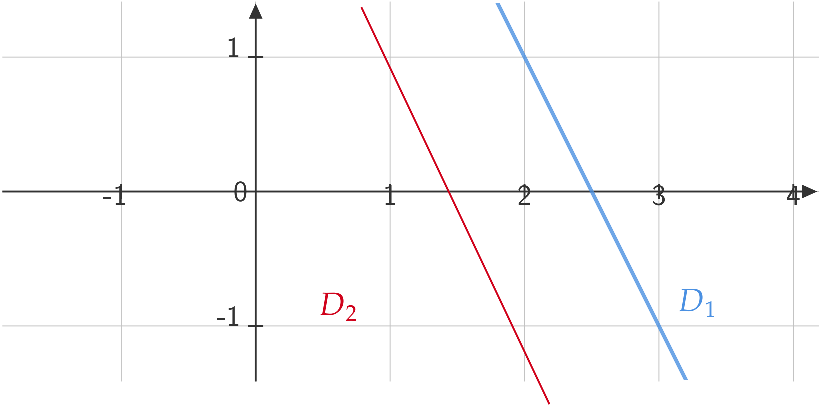


Figure 2: Aucune solution n'existe

Cas 3

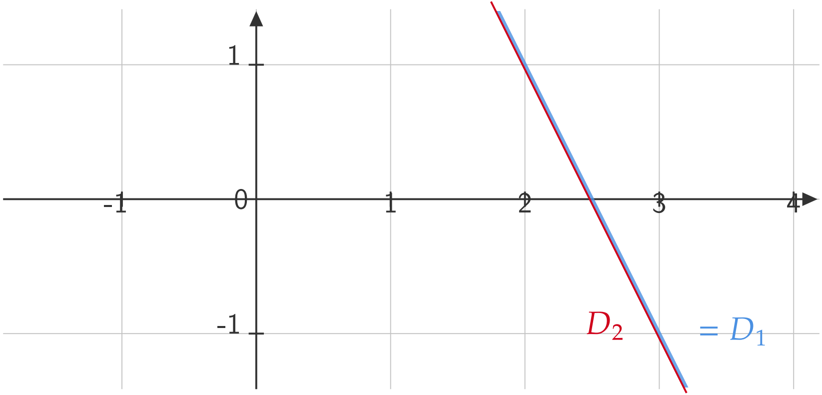


Figure 3: Une infinité de solutions existe

Résolution par substitution

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 7y = -2 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \\ 2x - 7y = -2 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \\ 2x - 7(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x) = -2 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \\ (2 - 7\frac{3}{2})x - \frac{7}{2} = -2 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} y = \frac{8}{25} \\ x = \frac{3}{25} \end{cases} \tag{7}$$

Méthode de Cramer

En 1750, Cramer donne le premier une règle permettant de déterminer les solutions d'un système de n équations à n inconnues.

Méthode de Cramér

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,n}x_n & = b_n \end{cases}$$

Ce système d'équations linéaires s'écrit matriciellement $AX = B$, avec,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

Exemple

Résoudre par substitution:

(9)

Résolution par la Méthode de Cramér

Si A est une matrice inversible ($det(A) \neq 0$) alors ce système admet une unique solution:

$$x_i = \frac{1}{det(A)} det(A_1, \ldots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \ldots, A_n) \tag{10}$$

Exemple

Résoudre (par la méthode de Cramér): $\begin{cases} x + 5y & = 2 \\ 2x + 9y & = 8 \end{cases}$

Résolution par inversion de matrice

Reprenons l'exemple des deux droites D_1 et D_2:

$$D_1 : a_{11}x + a_{12}y = b_1 \tag{11}$$

$$D_2 : a_{21}x + a_{22}y = b_2 \tag{12}$$

Ecriture matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Mini-exercice

Résoudre les systèmes linéaires de trois façons différentes:

$$\begin{cases} x - 2y &= -1 \\ -x + 3y &= 3 \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} 2x - y &= -1 \\ 3x + 3y &= -5 \end{cases} \tag{15}$$

Théorie des systèmes linéaires

Un système de m équations linéaire à n inconncues:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n & = b_m \end{cases}$$

Écriture matricielle

Ce système d'équations linéaires s'écrit matriciellement $AX = B$, avec,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K}), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \tag{16}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m. \tag{17}$$

Systèmes linéaires

Théorème

Un système d'équations linéaires n'a **soit aucune solution**, **soit une seule solution**, **soit une infinité de solutions**.

Definition (Système homogène)

On appelle système homogène le système d'équations linéaires $AX = 0$. Ce système admet toujours la solution triviale $X = 0$.

Résolution par la Méthode du pivot de Gauss

Definition (Système échelonné)

Un système est échelonné si:

• Le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne.

Definition (Système échelonné réduit)

Un système est échelonné réduit si:

- échelonné
- Le premier coefficient d'une ligne vaut 1 et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemples

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ 2x_3 = 4 \\ 7x_3 + 6x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{est ... ?} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{est ... ?}$$

Résolution par méthode du pivot de Gauss

- **1. Passage à une forme échelonnée**
  $$\begin{cases} -x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 20x_4 = -1 \end{cases}$$
- 2. Passage à une forme échelonnée **réduite**.
- Donner l'ensemble des solutions.

Solutions des systèmes d'équations linéaires Ax = b

Résumé

- $m < n$: Infinité de solutions.
- A de rang $< n$: Infinité de solutions.
- $m = n$ et rang de $A = n$, solution unique.
  - $x = A^{-1}b$
- A de rang $> n$, il n'existe pas de solution $\rightarrow$ **le problème des moindres carrés**.