Outils mathématiques pour l'électronique

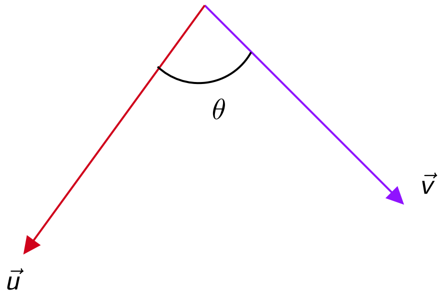
Sara El Bouch

sara.el-bouch@univ-cotedazur.fr
Université Côte d'Azur, EUR DS4H, J-.L Lagrange

Octobre 2024

Introduction

- Les espaces euclidiens sont des espaces vectoriels réels munis d'un produit scalaire.
- Ces espaces permettent de généraliser les notions de distance, angle et orthogonalité.



Application bilinéaire

Definition

Une *forme bilinéaire* d'un espace vectoriel est une application:

$$\begin{aligned} \phi : E \times E \to \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \phi(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned} \tag{1}$$

linéaire en chacune de ses entrées, c-à-d:

$$\phi(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \phi(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 \phi(\vec{u}, \vec{v}_2) \tag{2}$$

$$\phi(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda_1 \phi(\vec{u}_1, \vec{v}) + \lambda_2 \phi(\vec{u}_2, \vec{v}) \tag{3}$$

Une forme bilinéaire est dite:

- symétrique si $\phi(\vec{u}, \vec{v}) = \phi(\vec{v}, \vec{u})$
- positive: $\phi(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$
- définie: $\phi(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \implies \vec{u} = \vec{0}$.

Matrice associée à une application bilinéaire

Dans une base donnée $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$. Une forme bilinéaire peut être représentée par une matrice A tel que:

$$\phi(\vec{u}, \vec{v}) = u^\top A v$$

où u et v sont les coordonnées de $\vec{u}, \vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Matrice définie positive

Une matrice est dite:

- Symétrique: $A^T = A$
- Positive: $u^T A u \geq 0$
- positive et : $u^T A u = 0 \implies u = 0$.

Exemple

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique définie par :

$$\phi(u, v) = u_1 v_1 + 2u_2 v_2.$$

La matrice associée à ϕ dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est définie positive car pour tout $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$x^T A x = x_1^2 + 2x_2^2 > 0 \quad \text{pour tout } x \neq 0.$$

Par conséquent, la forme bilinéaire ϕ est définie positive.

Critère de Sylvestre

Une matrice symétrique est définie positive si tous les mineurs extraits dominants de la matrice associée dans une base sont strictement positifs.

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{k1} & & \dots & & a_{kk} \end{matrix}} & \dots a_{1n} \\ & \vdots \\ \dots \quad\quad \ddots & \\ a_{n1} \quad \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \delta_k(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Produit scalaire

Définition

Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E est une application bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, vérifiant :

1. **Symétrie** : $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ pour tous $u, v \in E$.
2. **Bilinéarité** : $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$, pour tous $u, v, w \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
3. **Définie positive** : $\langle u, u \rangle \geq 0$ et $\langle u, u \rangle = 0$ si et seulement si $u = 0$.

Exercice

- Montrer que

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Norme et Distance dans un Espace Euclidien

- La **norme** d'un vecteur $u \in E$ est définie par :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

- La **distance** entre deux vecteurs $u, v \in E$ est donnée par :

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

Propriétés fondamentales de la norme

- Homogénéité: $\|\lambda u\| = |\lambda| u$
- Inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|.\|v\|$$

- Inégalité triangulaire: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Orthogonalité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

Famille orthogonale

Une famille $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ est dite orthogonale ssi tous ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux:

$$\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = 0$$

pour $i \neq j$

Famille orthonormée

Définition

Une famille $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ est dite orthonormale ssi:

- $\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$
- $\|\vec{a}_i\| = 1$

Proposition

Une famille $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ forme une base orthonormale ssi la matrice de passage de $\mathcal{A}$ dans la base canonique est **une matrice orthogonale**. Soit

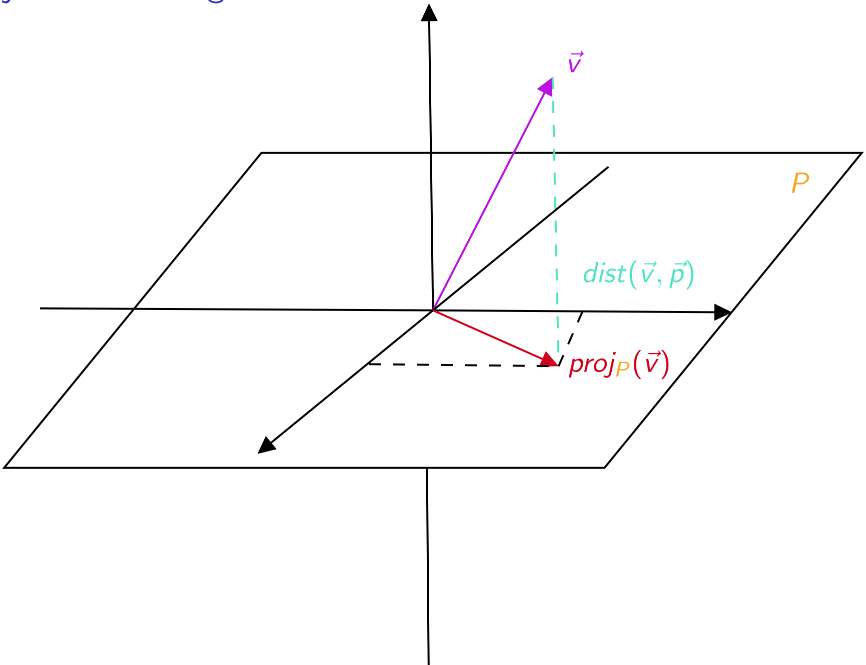
$$P = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{A}}(id), P^\top P = I_n$$

Exemple

Montrer que la famille de vecteurs est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{f_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Projection Orthogonale



Orthogonalité

Pour tout ensemble $A \subset E$ de vecteurs, on définit son **ensemble orthogonal** par l'ensemble de tous les vecteurs de A tel que:

$$A^{\perp} = \{\vec{x} \in E, \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0, \forall \vec{a} \in A\}$$

Definition (Projection orthogonale)

La projection orthogonale sur P est la projection sur P parallèlement à $P^{\perp}$. On la note $proj_P^{\perp}$

Projection Orthogonale sur un espace vectoriel

Definition

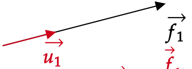
Soit $P \subset E$ un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien et soit $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ une base orthonormée. La projection orthogonale sur F est donnée par la formule:

$$proj_P(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \ldots + \langle \vec{v}, \vec{e}_n \rangle \vec{e}_n \tag{5}$$

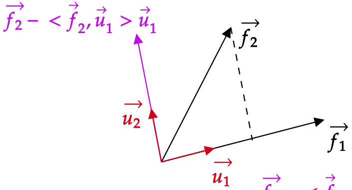
Proposition importante

Le projeté orthogonal sur P est l'unique vecteur de P qui minimise la distance de $\vec{v}$ à P.

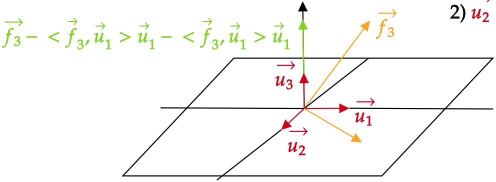
Procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt



1) $\overrightarrow{u_1} = \dfrac{\vec{f}_1}{||\vec{f}_1||}$



2) $\overrightarrow{u_2} = \dfrac{\overrightarrow{f_2} - <\vec{f}_2, \vec{u}_1> \vec{u}_1}{||\overrightarrow{f_2} - <\vec{f}_2, \vec{u}_1> \vec{u}_1||}$



3) $\overrightarrow{u_3} = \dfrac{\overrightarrow{f_3} - <\vec{f}_3, \vec{u}_1> \vec{u}_1 - <\vec{f}_3, \vec{u}_2> \vec{u}_2}{||\overrightarrow{f_3} - <\vec{f}_3, \vec{u}_1> \vec{u}_1 - <\vec{f}_3, \vec{u}_2> \vec{u}_2||}$

Exemple

- Orthonoramliser la base suivante de $\mathbb{R}^3$ (p.197):

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Diagonalisation des matrices symétriques

Toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres de l'espace euclidien. Il existe donc une matrice **orthognonale** P tel que: $A = P^T \Delta P$

Exemple

On considère $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Solutions des systèmes d'équations linéaires Ax = b

Résumé

- $m < n$: Infinité de solutions.
- A de rang $< n$: Infinité de solutions.
- $m = n$ et rang de $A = n$, solution unique.
  - $x = A^{-1}b$
- A de rang $> n$, il n'existe pas de solution $\rightarrow$ **le problème des moindres carrés**.

La méthode des moindre carrés

Une solution approchée, au sens des moindre carrées au système d'équations linéaires incompatible est:

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{7}$$

$$\vec{x'} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}. \tag{8}$$