Examen Blanc

L3 électronique

07 Novembre 2024

1 Espaces euclidiens

1.1 Produit Scalaire

Dans l'espace vectoriel des matrices carrées à valeurs réelles $M_2(\mathbb{R})$, on considère l'application définie par:

$$\langle .,. \rangle : \begin{array}{l} M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ (A, B) \mapsto Tr(A^\top B) \end{array} \tag{1}$$

1. Donner les trois propriétés (noms et définitions) pour que $\langle .,. \rangle$ définisse un produit scalaire.
2. Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire.
3. Quelle est la norme associée à ce produit scalaire ?

1.2 1. Bilinéarité de l'application

On commence par montrer la linéarité à gauche. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $A_1, A_2, B \in M_2(\mathbb{R})$. La linéarité de la transposée et de la trace impliquent :

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, B \rangle &= \mathrm{tr}((\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)^\top B) \\
&= \mathrm{tr}((\lambda_1 A_1^\top + \lambda_2 A_2^\top) B) \\
&= \mathrm{tr}(\lambda_1 A_1^\top B + \lambda_2 A_2^\top B) \\
&= \lambda_1 \mathrm{tr}(A_1^\top B) + \lambda_2 \mathrm{tr}(A_2^\top B) \\
&= \lambda_1 \langle A_1, B \rangle + \lambda_2 \langle A_2, B \rangle.
\end{aligned}$$

La linéarité à droite se montre de la même manière. Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ et $A, B_1, B_2 \in M_2(\mathbb{R})$. La linéarité de la trace implique :

$$\begin{aligned}
\langle A, \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 \rangle &= \mathrm{tr}(A^\top (\mu_1 B_1 + \mu_2 B_2)) \\
&= \mathrm{tr}(\mu_1 A^\top B_1 + \mu_2 A^\top B_2) \\
&= \mu_1 \mathrm{tr}(A^\top B_1) + \mu_2 \mathrm{tr}(A^\top B_2) \\
&= \mu_1 \langle A, B_1 \rangle + \mu_2 \langle A, B_2 \rangle.
\end{aligned}$$

Donc, la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire.

Symétrie :

Rappelons que la trace est invariante par transposition, c'est-à-dire $\mathrm{tr}(M^\top) = \mathrm{tr}(M)$, et que la transposée d'un produit de matrices est égale au produit, dans le sens inverse, des transposées des matrices, c'est-à-dire $(MN)^\top = N^\top M^\top$. De ces deux propriétés, on déduit la symétrie de la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de la manière suivante :

$$\langle B, A \rangle = \mathrm{tr}(B^\top A) = \mathrm{tr}((A^\top B)^\top) = \mathrm{tr}(B^\top A^\top) = \mathrm{tr}(A^\top B) = \langle A, B \rangle.$$

Positivité :

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille 2×2, elle s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$A^\top A = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\langle A, A \rangle = \mathrm{tr}(A^\top A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0.$$

Définition positive :

Le calcul précédent montre que si une matrice A est telle que $\langle A, A \rangle = 0$, cela signifie que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$. Donc tous ses coefficients sont nuls et $A = 0$.

Au final, cela montre que la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

La norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie par la formule :

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ désigne les coefficients de la matrice A.

1.3 Diagonalisation d'une matrice symétrique

On considère la matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ suivante:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de M. En déduire les valeurs propres de M.

2. On considère la base suivante:

$$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

3. Constuire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (muni de son produit scalaire canonique). Donner le nom de l'algorithme que vous utilisez.

4. Enoncer le théorème de diagonalisation des matrices symétriques.

5. Vérifier que la base orthonormée obtenue est une base de diagonalisation de M.

1. Le polynôme caractértistique $\det(M - \lambda I_3) = \lambda(\lambda - 2)(3 - \lambda)$. Donc les valeurs propres de M sont $0, 2, 3$.

2. On applique l'algorithme de Gram–Schmidt à la base $\mathcal{F}$ pour obtenir une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. La norme du premier vecteur est $\|\vec{f_1}\| = \sqrt{2}$. On pose donc

$$\vec{u_1} := \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $F_1 = \mathrm{Vect}(\{\vec{u_1}\})$ la droite engendrée par $\vec{u_1}$. La projection orthogonale de $\vec{f_2}$ sur F_1 est

$$\mathrm{proj}_{F_1}(\vec{f_2}) = \langle \vec{f_2}, \vec{u_1}\rangle \vec{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur

$$\vec{f_2} - \mathrm{proj}_{F_1}(\vec{f_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonal à $\vec{u_1}$. Sa norme vaut $\sqrt{3}$; on le normalise pour obtenir le deuxième vecteur

$$\vec{u_2} := \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $F_2 = \mathrm{Vect}(\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\})$ le plan engendré par $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$. La projection orthogonale de $\vec{f_3}$ sur F_2 est

$$\mathrm{proj}_{F_2}(\vec{f_3}) = \langle \vec{f_3}, \vec{u_1}\rangle \vec{u_1} + \langle \vec{f_3}, \vec{u_2}\rangle \vec{u_2} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur

$$\vec{f_3} - \mathrm{proj}_{F_2}(\vec{f_3}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est orthogonal à $\vec{u_1}$ et à $\vec{u_2}$. Sa norme vaut $\sqrt{6}$; on le normalise pour obtenir le troisième vecteur

$$\vec{u_3} := \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Au final, la famille $\mathcal{U} := \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

3. Toute matrice symétrique M est diagonalisable sur une base de vecteurs propres orthonormés. Autrement dit, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D tel que $M = P^\top DP$.

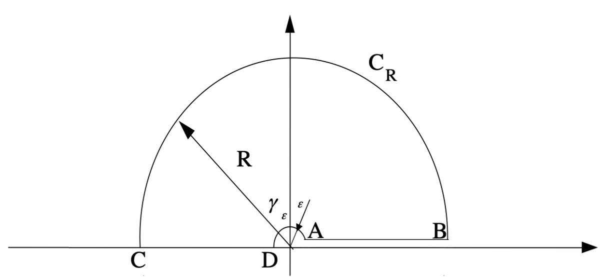
4. La base orthonormée $\mathcal{U}$ est-elle une base de diagonalisation de M, c'est-à-dire une base de vecteurs propres de M ?

   Un calcul direct montre que

$$\begin{cases} M\vec{u_1} = 2\vec{u_1} \\ M\vec{u_2} = 3\vec{u_2} \\ M\vec{u_3} = 0\vec{u_3}. \end{cases}$$

   La base $\mathcal{U}$ est donc bien une base de vecteurs propres de la matrice M.

2 Fonctions de la variable complexe



1) Définir la détermination de

$$f(z) = \frac{\log z}{1 + z^4}$$

telle que $\log z = \ln x$ sur AB.

2) Calculer la valeur de cette détermination sur CD.

3) Calculer les résidus de la fonction f associés aux pôles situés à l'intérieur du contour

$$\Gamma = AB \cup C_R \cup CD \cup \gamma_\varepsilon.$$

4) Étudier avec soin $\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon$ et $\lim_{R\to+\infty} J_R$ avec

$$I_\varepsilon = \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz, \quad J_R = \int_{C_R} f(z)\,dz.$$

5) En déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^4}\,dx.$$

Solution de l'exercice 3 (Série 1)

1) On pose $z = \rho e^{i(\theta+2k\pi)}$ avec $0 < \theta < 2\pi$ et on obtient la détermination de rang k de la fonction $f(z)$:

$$f_k(z) = \frac{\ln\rho + i\,(\theta + 2k\pi)}{1+z^4}$$

qui admet pour coupure l'axe $[0, +\infty[$. Sur le bord supérieur de la coupure, on a $\theta = 0, \rho = x$ et $z = x$. Pour avoir $\log z = \ln x$ sur AB, il suffit de prendre $k = 0$, c'est-à-dire de travailler avec la détermination principale de $f(z)$:

$$f_0(z) = \frac{\ln\rho + i\theta}{1+z^4}$$

2) Sur le segment CD, on a $\theta = \pi, \rho = -x$ et $z = x$. Donc

$$f_0\,(z) = \frac{\ln\,(-x) + i\pi}{1+x^4}$$

tandis que sur le bord supérieur de la coupure, on a

$$f_0\,(z) = \frac{\ln x}{1+x^4}$$

3) La fonction f admet quatre pôles simples qui sont les racines de $z^4 + 1 = 0$, à savoir :

$$p_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, p_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, p_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ et } p_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

Les pôles de f situés à l'intérieur du contour Γ sont p_1 et p_2. Puisque ces pôles sont simples, on peut déterminer les résidus de la fonction $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ à l'aide de l'expression :

$$\text{res}f\,(p_i) = \frac{P\,(p_i)}{Q'\,(p_i)} = \frac{\log p_i}{4p_i^3}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\text{res}f(p_1) &= \frac{i\pi/4}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{i\pi}{16}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{i\pi\sqrt{2}}{32}\,(1+i) \\
\text{res}f(p_2) &= \frac{3i\pi/4}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}} = \frac{3i\pi}{16}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{3i\pi\sqrt{2}}{32}\,(1-i)
\end{aligned}$$

4) Montrons maintenant que l'intégrale sur γ_ε tend vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$. Pour cela, on utilise le premier lemme de Jordan qui nécessite d'étudier

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\gamma_\varepsilon}|zf(z)|$$

Sur γ_ε, on a $z = \varepsilon e^{i\theta}$ avec $0 \le \theta \le 2\pi$. Donc :

$$|zf(z)| = \frac{\varepsilon\,|\ln\varepsilon + i\theta|}{|1+\varepsilon^4 e^{4i\theta}|}$$

Mais $|\ln\varepsilon + i\theta| \leq |\ln\varepsilon| + 2\pi$ et $\left|1+\varepsilon^4 e^{4i\theta}\right| \geq \left||1| - \left|\varepsilon^4 e^{4i\theta}\right|\right| = 1-\varepsilon^4$, d'où

$$0 \leq |zf(z)| \leq \frac{\epsilon\left(|\ln\varepsilon| + 2\pi\right)}{1-\varepsilon^4}$$

Le dernier terme tendant vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$ indépendamment de θ, on en déduit

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\gamma_\varepsilon} |zf(z)| = 0$$

D'après le premier lemme de Jordan, on a alors

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = 0}$$

De même, sur C_R, on pose $z = R\,e^{i\theta}$. Puisque $|1+z^4| \geq ||z^4|-1| = R^4-1$ et $\theta \leq 2\pi$, on a :

$$0 \leq |zf(z)| \leq \frac{R\left[|\ln R| + 2\pi\right]}{R^4-1}.$$

Le dernier terme tendant vers 0 lorsque $R \to +\infty$ indépendamment de θ, on en déduit

$$\lim_{R\to+\infty}\sup_{C_R} |zf(z)| = 0$$

d'où, d'après le premier lemme de Jordan :

$$\boxed{\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0}$$

5) La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé de $[0,+\infty[$ et des quatre pôles p_1, p_2, p_2 et p_4. On peut donc appliquer le théorème des résidus à la fonction f sur le contour proposé. On obtient alors :

$$\int_{AB\cup C_R\cup DC\cup\gamma_\varepsilon} f(z)dz = (2i\pi)\left[\mathrm{res} f(p_1) + \mathrm{res} f(p_2)\right]$$

car les seules singularités situées à l'intérieur du contour sont les pôles p_1 et p_2. Les intégrales sur C_R et sur γ_ε tendent vers 0, lorsque $R\to+\infty$ et $\varepsilon \to 0$. D'autre part :

$$\int_{AB} g(z)dz \underset{R\to+\infty,\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^4}dx$$
$$\int_{DC} g(z)dz \underset{R\to+\infty,\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln(-x) + i\pi}{1+x^4}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x + i\pi}{1+x^4}dx$$

Lorsqu'on fait la somme de ces deux intégrales on obtient

$$\begin{aligned} 2\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^4}dx + i\pi\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4} &= 2i\pi\left[-\frac{i\pi\sqrt{2}}{32}(1+i) + \frac{3i\pi\sqrt{2}}{32}(1-i)\right] \\ &= -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{8} + \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}i \end{aligned}$$

d'où, par identification

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^4}dx = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} \text{ et } \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}}$$