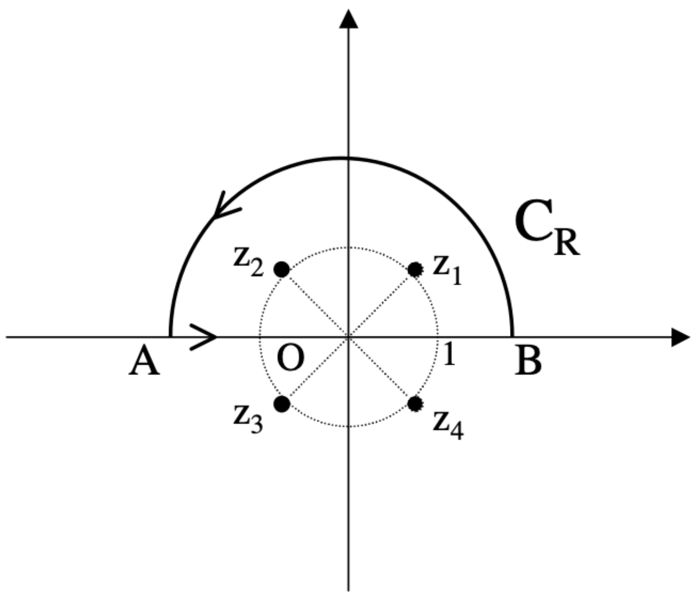
La fonction $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ est uniforme et holomorphe sur

$$\mathbb{C} \setminus \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}} \right\}$$

car :

$$z^4 + 1 = \left(z - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(z - e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(z - e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)\left(z - e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)$$

On applique alors le théorème des résidus sur le contour $\Gamma = C_R \cup [AB]$, C_R étant le demi-cercle de centre O et de rayon R représenté ci-dessous avec :



Il y a deux points singuliers isolés z_1 et z_2 à l'intérieur du contour proposé. Ces points singuliers isolés sont des pôles d'ordre 1. Le théorème des résidus appliqué à f sur Γ donne :

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1} = 2i\pi \left[\operatorname{res} f\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) + \operatorname{res} f\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \right] \tag{E}$$

En posant $P(z) = 1$ et $Q(z) = z^4 + 1$, z_1 et z_2 étant des pôles d'ordre 1, on a :

$$\operatorname{res} f(z_1) = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\operatorname{res} f(z_2) = \frac{1}{4}e^{-i\frac{9\pi}{4}}$$

De plus

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^4+1}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}$$

A présent on applique le premier lemme de Jordan à $\int_{C_R}\frac{dz}{z^4+1}$.
Le paramétrage de C_R par $z=Re^{i\theta}$ avec $\theta\in[0,\pi]$ donne :

$$\sup_{C_R}|zf(z)|=\sup_{\theta\in[0,\pi]}\left|\frac{Re^{i\theta}}{R^4e^{i4\theta}+1}\right|=\sup_{\theta\in[0,\pi]}\frac{R}{|R^4e^{i4\theta}+1|}$$

Or

$$\forall(a,b)\in\mathbb{C}^2,\quad ||a|-|b||\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$$

Donc :

$$\left|R^4e^{i4\theta}+1\right|\geq\left||R^4e^{i4\theta}|-1\right|$$

Ainsi, comme $|e^{i4\theta}|=1$, $|R^4e^{i4\theta}|=R^4$, et $R^4-1>0$ pour R "grand" (ce qui est le cas par passage à la limite),

$$\left|R^4e^{i4\theta}+1\right|\geq R^4-1,\quad\text{soit}\quad\left|\frac{Re^{i\theta}}{R^4e^{i4\theta}+1}\right|\leq\frac{R}{R^4-1}$$

alors :

$$0\leq\sup_{C_R}|zf(z)|\leq\frac{R}{R^4-1}$$

Mais, puisque

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{R}{R^4-1}=0$$

on a:

$$\lim_{R\to+\infty}\sup|zf(z)|=0,$$

Ainsi d'après le premier lemme de Jordan,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{dz}{z^4+1}=0$$

Par passage à la limite $R\to+\infty$ dans (E), on trouve:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}+\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{dz}{z^4+1}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}+0=2i\pi\left[\operatorname{res}f\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)+\operatorname{res}f\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\right]\tag{E}$$

D'où,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$